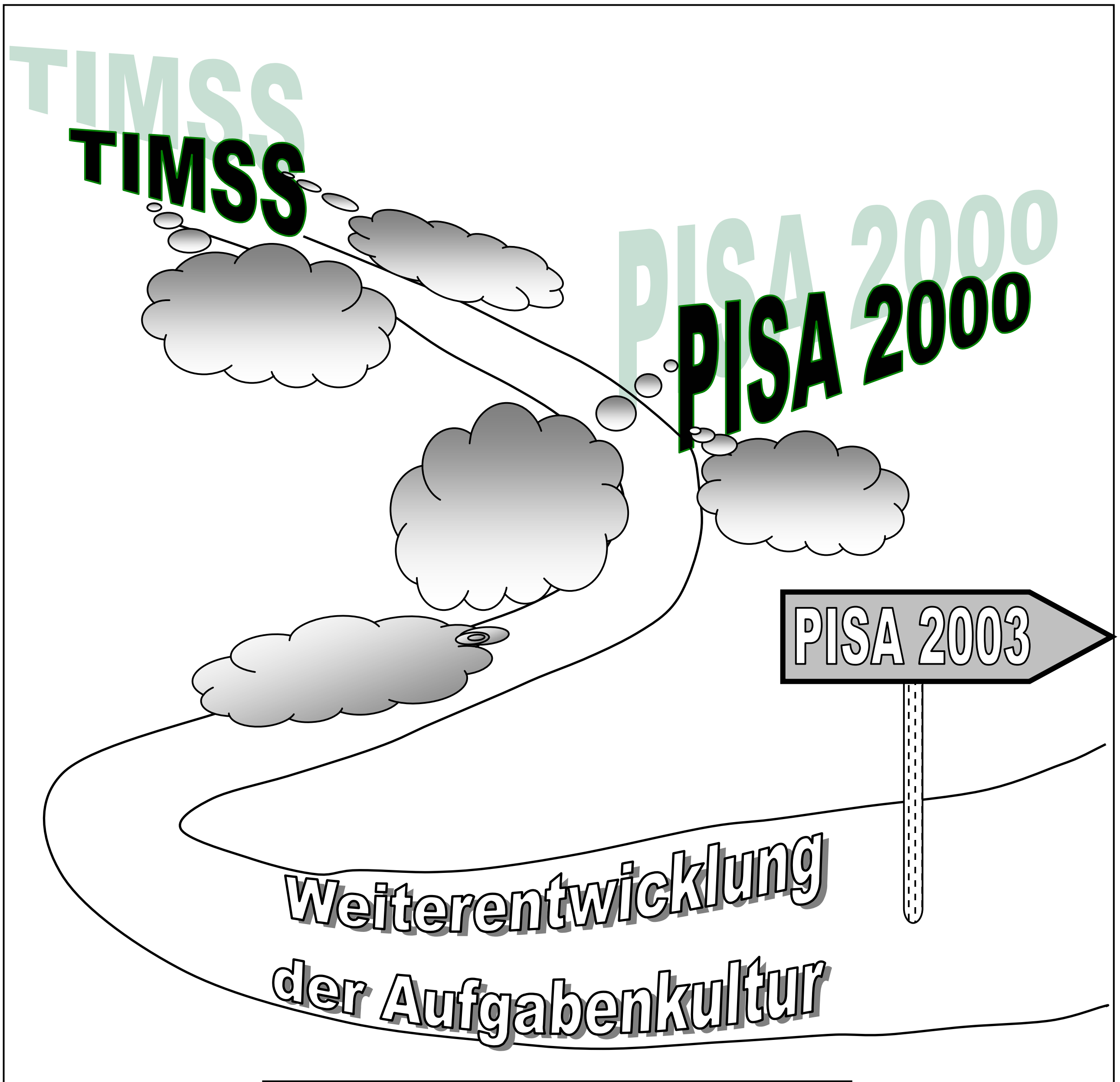
Rheinland-Pfalz

Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht

– angeregt durch TIMSS und PISA –



Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Anstöße durch TIMSS und PISA

Ausgelöst durch die Ergebnisse der TIMS-Studien und von PISA 2000 wird seit einiger Zeit verstärkt darüber diskutiert, wie die Wirksamkeit des Mathematikunterrichts erhöht werden kann. Dabei geht es vor allem um zwei Probleme: Zum einen wird einmal Gelerntes schnell wieder vergessen, sodass man später nicht auf Grundkenntnisse und –fertigkeiten zurückgreifen kann, und zum anderen sind Schülerinnen und Schüler nicht hinreichend in der Lage, ihr Wissen flexibel einzusetzen und mit offeneren Aufgabenstellungen und Anwendungsproblemen umzugehen.

Veränderung der Aufgabenkultur

Eine zunehmende Zahl von Lehrerinnen und Lehrern ist – angeregt durch diese Ergebnisse der TIMS- und PISA-Studie – bereit und daran interessiert, ihr eigenes Unterrichtsskript zu verändern. Einen guten Ansatzpunkt dafür bietet eine Veränderung der Aufgabenkultur.

Diejenigen Aufgaben aus den Mathematiktests von TIMSS und PISA 2000, die in den offiziellen Ergebnisberichten veröffentlicht sind, geben einen Einblick, welche Kompetenzen von den Schülerinnen und Schülern in den Tests gefordert wurden und damit auch Lehrkräften Hinweise, wo sie mit einer Veränderung der Aufgabenkultur ansetzen können, und in welche Richtung eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts gehen sollte. Mit dem gleichen Ziel wurden in Rheinland-Pfalz die vom deutschen bzw. internationalen PISA-Konsortium freigegebenen Beispielaufgaben der PISA 2000-Studie einschließlich der zugehörigen Lösungen auf einer CD-ROM zusammengefasst und jeder Schule zugeschickt.

Diese Angebote stoßen auf großes Interesse. Lehrkräfte greifen die Testaufgaben auf, nicht zuletzt in der Erwartung, dass eine Beschäftigung mit diesen Aufgabenarten ihren Schülerinnen und Schülern bessere Chancen bei künftigen Tests (z.B. PISA 2003) eröffnet. Darüber hinaus regen die Testaufgaben auch dazu an, die Aufgabenkultur generell zu verändern und offenere Aufgaben, Aufgaben mit mehreren Lösungswegen, Aufgaben zu früher behandelten Stoffgebieten und Anwendungsaufgaben verstärkt einzubeziehen. Dies kann der erste Schritt sein zu einer Öffnung des eigenen Unterrichts mit dem Ziel, den Schülerinnen und Schülern mittel- und langfristig ein vertieftes Grundverständis für mathematische Zusammenhänge, auch in ihrem privaten und beruflichen Umfeld, zu vermitteln.

Ziele des vorliegenden Hefts

Das vorliegende Heft soll Lehrerinnen und Lehrer auf diesem Weg unterstützen. Auch in diesem Heft finden sich TIMSS- und PISA-Aufgaben. Sie sind allerdings nicht in beliebiger Folge aneinander gereiht, sondern nach vier Kategorien, die vier unterschiedliche Aufgabentypen repräsentieren, geordnet. (Beschreibungen der Kategorien s. S. 5) Außerdem sind in jeder Kategorie über die TIMSS- und PISA-Aufgaben hinaus weitere Aufgaben, die dem jeweiligen Typ zuzuordnen sind, hinzugefügt, um ein gegenüber den bisherigen Veröffentlichungen erweitertes Aufgabenangebot zur Verfügung zu stellen.

Die Kategorien sind nach steigendem Anspruchsniveau gestuft. In jeder Kategorie sind eine Beschreibung des Aufgabentyps, die Angabe möglicher Ursachen für die beobachteten Defizite beim Lösen dieser Art von Aufgaben und Hinweise für den unterrichtlichen Einsatz den Aufgaben vorangestellt. Dies soll Lehrkräften die Planung und Unterrichtsvorbereitung erleichtern. Wo es sinnvoll ist, wird der Bezug zum rheinland-pfälzischen Mathematiklehrplan hergestellt; Lösungen und Kommentare verdeutlichen die Intention der Aufgaben.

Das Heft richtet sich vorrangig an Mathematiklehrerinnen und –lehrer der Klassenstufen 8 und 9 an Gymnasien, die gebeten werden, Aufgaben aus dieser Sammlung möglichst regelmäßig in ihrem Unterricht einzusetzen – unabhängig davon, welches Thema gerade aktuell behandelt wird. Darüber hinaus wird empfohlen, dass die in Parallelklassen unterrichtenden Lehrkräfte auch ihre Erfahrungen mit den Aufgaben und den Reaktionen der Schülerinnen und Schüler untereinander austauschen.

In Planung: ein Folgeheft

Es ist geplant in einem Folgeheft weitere Aufgaben zum Öffnen von Unterricht anzubieten. Im Gegensatz zum vorliegenden Heft werden dort vor allem Aufgabenbeispiele zu finden sein, die

- an Stelle von Aufgabentext mit Fragen ein komplexeres Sachproblem beschreiben,
- Modellierungsprozesse erfordern,
- eine längere Bearbeitungszeit durch die Schülerinnen und Schüler beanspruchen,
- neue Unterrichtsformen und –methoden ermöglichen und sinnvoll erscheinen lassen,
- in verstärktem Maß für verschiedene Lösungswege offen sind,
- bei der Besprechung der Aufgaben den Vergleich und die Diskussion verschiedener Lösungsansätze und -wege erforderlich machen.

Aufbau und Handhabung der Aufgabensammlung

Einteilung der PISA- und TIMSS-Aufgaben in vier Kategorien

Analysiert man die veröffentlichten PISA- und TIMSS-Aufgaben mit den Zielen:
- Ursachen dafür zu finden, dass Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgaben nicht immer im gewünschten Maß erfolgreich sind,
- unterrichtliche Maßnahmen zu reflektieren, die Schülerinnen und Schüler besser befähigen, Kompetenzen im Bereich der "mathematischen Grundbildung" (mathematical literacy) zu erwerben und somit entsprechende Aufgaben und Problemstellungen sicherer zu bewältigen,

so bietet sich eine Einteilung in folgende vier Kategorien an:

1. Klassische Textaufgaben aus anwendungsrelevanten Stoffgebieten des Lehrplans
2. Aufgaben zu Stoffgebieten des Lehrplans mit unüblichen Fragen
3. Aufgaben, die nicht an spezielle Stoffgebiete des Lehrplans gebunden sind (Deuten von Graphen, Interpretieren von stochastischen Aussagen[1])
4. Aufgaben, die selbstständige Lösungswege abverlangen.

Die Kategorien werden unten näher erläutert. Reine Rechenaufgaben wurden in der Kategorisierung nicht berücksichtigt; sie sind nur bei TIMSS, nicht aber bei PISA zu finden.

Die vier Kategorien haben nichts zu tun mit den "5 Stufen mathematischer Kompetenz", die vom internationalen bzw. nationalen PISA-Konsortium definiert wurden[2] und auch nichts mit der dort angegebenen Klassifizierung von Modellierungsaufgaben.

Aufbau der Aufgabensammlung nach den vier Kategorien

Diese Aufgabensammlung ist nach den vier genannten Kategorien gegliedert. Die Kategorien sind nach steigendem Anspruchsniveau gestuft. So können sich die Lehrkräfte, die ihren Schülerinnen und Schülern die einschlägigen Aufgaben vorlegen wollen, besser orientieren und Aufgaben auswählen, die von den Anforderungen am besten für die jeweilige Unterrichts- und Klassensituation geeignet sind. In jedem Abschnitt wird zunächst der Aufgabentyp der jeweiligen Kategorie kurz charakterisiert, dann wird versucht, Ursachen für Defizite bei den Schülerinnen und Schülern aufzuspüren und schließlich werden mögliche unterrichtliche Maßnahmen reflektiert.

Es folgen die Aufgaben. Sie sind alle für den unmittelbaren Einsatz im Unterricht gedacht. Zunächst sind Aufgaben aus der TIMSS- und der PISA-Studie, die man der jeweiligen Kategorie zurechnen kann, aufgeführt. Im nächsten Abschnitt findet man jeweils weitere Aufgaben für den Unterricht, die von der Arbeitsgruppe zusammengestellt wurden. Sie sollen Lehrerinnen und Lehrer auch anregen, selbst Aufgaben zu der entsprechenden Kategorie zu suchen bzw. zu erstellen.

---

[1] Beachte: Hinweis zu 3.2 auf Seite 44

[2] Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000. – Opladen 2001

Hinweise zum Einsatz der Aufgaben im Unterricht

Die Aufgaben richten sich an Schülerinnen und Schüler des 8. und 9. Schuljahrs. Mit den Aufgaben dieses Hefts ist vor allem daran gedacht, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, sich mit ungeübten und unerwarteten Fragestellungen in kurzer Zeit erfolgreich auseinander zu setzen (Testsituation). Dazu gehört:

- Die Schülerinnen und Schüler sollen Mut gewinnen, sich mit einer Aufgabe zu beschäftigen, auch wenn nicht sofort ein geeignetes Lösungsverfahren erkannt wird.
- Sie sollen auch systematisches Probieren als *einen* Weg, der Lösung näher zu kommen, anerkennen.
- Durch das Bearbeiten der Aufgaben sollen fachliches Grundwissen und bekannte Lösungsstrategien gesichert werden.

Für die Unterrichtsgestaltung ergeben sich daraus folgende Konsequenzen:

- Die Aufgaben sollen unabhängig vom gerade im Unterricht behandelten Thema eingesetzt werden.
- Die Aufgaben sollen möglichst in Einzelarbeit gelöst werden, damit sich jede Schülerin/ jeder Schüler mit der Aufgabe wirklich auseinandersetzt. – Eine andere Möglichkeit ist, dass nach wenigen Minuten Einzelarbeit die eigenen Überlegungen mit einem Partner/ einer Partnerin besprochen werden.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben soll den Schülerinnen und Schülern nur eine begrenzte Zeit zur Verfügung stehen. (Hinweis: Zum Lösen einer PISA-Aufgabe standen durchschnittlich 2 Minuten zur Verfügung.)
- Es sollten in einer Unterrichtsstunde nur eine Aufgabe bearbeitet werden, dies aber in möglichst vielen Stunden. Nicht ratsam ist, hin und wieder eine ganze Stunde mit dieser Art Aufgaben zuzubringen. Bei Aufgaben, die aus mehreren Teilaufgaben bestehen, kann es sinnvoll sein, diese in zwei aufeinander folgenden Stunden zu bearbeiten.
- Die Erfolge/Misserfolge bei der Bearbeitung der Aufgaben sollen in der Regel nicht bewertet werden.
- Durch Anleiten zum konzentrierten Lesen und sachgerechten Erfassen der Aufgabentexte kann die Lesekompetenz trainiert werden.

Quellenangaben für die PISA– und TIMSS-Aufgaben:

- OECD Programme for International Student Assessment:
  PISA 2000 Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest.
  Beispielaufgaben aus dem Feldtest: Lesen, Mathematik, Naturwissenschaften
  Beispiele für internationale PISA-Aufgaben: Mathematik
  [www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/]

- Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen 2001

- Baumert, Jürgen u.a. (Hrsg.): Testaufgaben Mathematik TIMSS II 7./8. Klasse (Population 2)
  [www.timss.mpg.de]

Kategorie 1: Klassische Textaufgaben aus anwendungsrelevanten Stoffgebieten des Lehrplans

Beschreibung der Aufgaben

Es handelt sich in dieser Kategorie um Sach- bzw. Textaufgaben, die üblicherweise im Unterricht behandelt und von den Schülerinnen und Schülern in selbstständigen Übungen und in Klassenarbeiten mit Erfolg bearbeitet werden. Sie lassen sich Stoffgebieten des Lehrplans zuordnen. In Klassen, in denen das jeweilige Stoffgebiet noch nicht behandelt ist, rückt die Aufgabe in Kategorie 4.

Mögliche Ursachen für Defizite bei den Schülerinnen und Schülern

Die Phase, in der solche Aufgaben im Unterricht behandelt werden, ist häufig zeitlich begrenzt: Geübt wird, wenn das Thema im Unterricht behandelt wird, geprüft am Ende einer entsprechenden Unterrichtseinheit. Danach beginnt eine neue Unterrichtseinheit mit einem neuen Thema. Die Folge ist, dass Inhalte und Fertigkeiten in Vergessenheit geraten, erworbene Kompetenzen nicht gefestigt und vertieft werden. Nach einiger Zeit stehen die Schülerinnen und Schüler Fragestellungen aus dem behandelten Themenbereich mehr oder weniger hilflos gegenüber.

Mögliche unterrichtliche Maßnahmen

Sichern eines Grundbestandes von mathematischen Kenntnissen und Kompetenzen durch regelmäßige Wiederholungen und Übungen von einschlägigen Aufgaben aus den genannten Stoffgebieten, auch in höheren Klassenstufen.

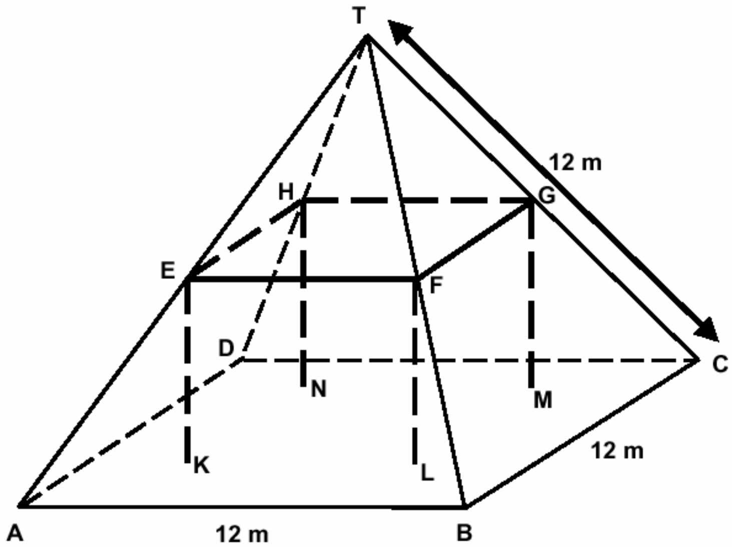
Literaturhinweise:

- Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.): Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts – Erfahrungsbericht zum BLK-Programm SINUS in Bayern. – München 2002, S. 36ff.
- Weber, F. (Hrsg.): Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts – Die Umsetzung des BLK-Programms in Rheinland-Pfalz. – Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung 1999, S. 16ff., 76ff.

PISA- und TIMSS-Aufgaben

Bauernhöfe

Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach. Nachfolgend siehst du eine Skizze mit den entsprechenden Maßen, die eine Schülerin vom Dach des Bauernhauses gezeichnet hat.



Der Dachboden, in der Skizze ABCD, ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten eines Quaders (rechtwinkliges Prisma) EFGHKLMN. E ist die Mitte von $\overline{AT}$, F ist die Mitte von $\overline{BT}$, G ist die Mitte von $\overline{CT}$ und H ist die Mitte von $\overline{DT}$.
Jede Kante der Pyramide in der Skizze misst 12 m.

Berechne den Flächeninhalt des Dachbodens ABCD.

Der Flächeninhalt des Dachbodens ABCD = ______________ m²

Lehrplanbezug: Flächeninhalt eines Quadrats

Flechten

Die weltweite Erwärmung hat zur Folge, dass das Eis einiger Gletscher schmilzt. Zwölf Jahre nach dem Wegschmelzen des Eises beginnen auf den Felsen winzige Pflanzen zu wachsen, die sogenannten Flechten.

Jede Flechte wächst ungefähr kreisförmig.

Der Zusammenhang zwischen dem Durchmesser dieses Kreises und dem Alter der Flechten kann mit folgender Formel angenähert bestimmt werden:
$d = 7{,}0 \bullet \sqrt{t-12}$ *für* $t \geq 12$
wobei *d* den Durchmesser der Flechte in Millimeter angibt und *t* die Zahl der Jahre nach dem Wegschmelzen des Eises.

a) Berechne anhand der Formel den Durchmesser der Flechten 16 Jahre nach dem Wegschmelzen des Eises. Gib deine Berechnung an.

b) Anne hat den Durchmesser einer Flechte gemessen und festgestellt, dass er 35 Millimeter beträgt. Vor wie vielen Jahren ist das Eis an dieser Stelle verschwunden? Gib deine Berechnung an.

Lehrplanbezug: Gleichungslehre

Terrasse

Nick möchte die rechteckige Terrasse seines neuen Hauses pflastern. Die Terrasse ist 5,25 Meter lang und 3,00 Meter breit. Er benötigt 81 Pflastersteine pro Quadratmeter. Berechne, wie viele Pflastersteine Nick für die ganze Terrasse braucht.

Lehrplanbezug: Flächeninhalt Rechteck

Zeitdauer

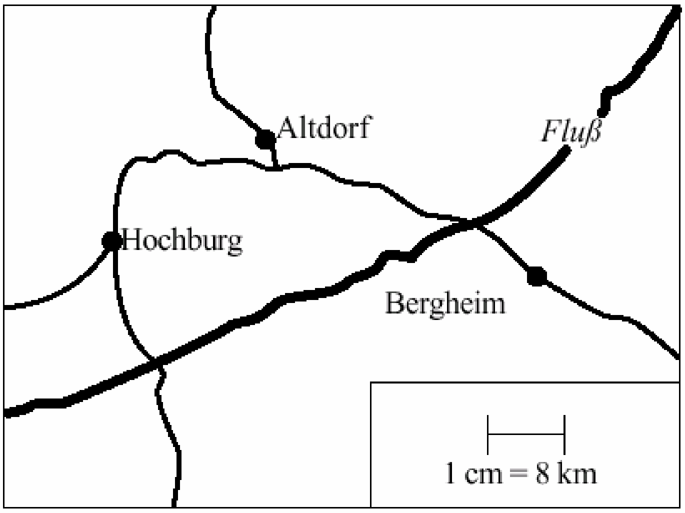
Welche der folgenden Angaben bezeichnet die längste Zeitdauer?

- ☐ 15 000 Sekunden
- ☐ 1 500 Minuten
- ☐ 10 Stunden
- ☐ 1 Tag

Lehrplanbezug: Umrechnen von Zeitmaßen

Landkarte

Ein Zentimeter auf der Karte entspricht 8 Kilometern in Wirklichkeit.



Wie weit ist Altdorf von Bergheim in Wirklichkeit entfernt?

☐ 4 km ☐ 16 km
☐ 35 km ☐ 50 km

Lehrplanbezug: Maßstab

Gewicht eines Delphins

Das Gewicht eines Delphins wird mit 170 kg angegeben (gerundet auf 10 kg genau).
Gib ein Beispiel für das tatsächliche Gewicht des Delphins (außer 170 kg), das der Delphin haben kann!

Antwort: ________________________________

Lehrplanbezug: Runden

Brötchen

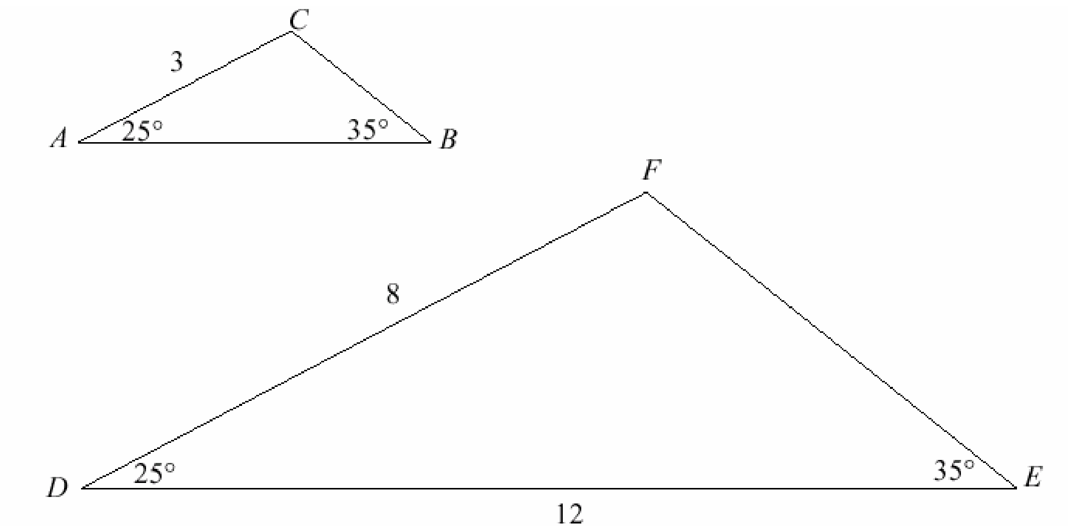
7 Brötchen kosten 3,15 DM. Was kosten 11 Brötchen?

☐ 5,05 DM ☐ 4,95 DM ☐ 4,85 DM
☐ 4,75 DM ☐ 4,65 DM

Lehrplanbezug: Dreisatz

Ähnliche Dreiecke

Die Dreiecke *ABC* und *DEF* sind ähnlich.



Wie lang ist die Seite $\overline{AB}$?

☐ 2 ☐ 4 ☐ 4,5
☐ 5,5 ☐ 32

Lehrplanbezug: Ähnlichkeit

Glasfabrik

a) Eine Glasfabrik stellt am Tag 8000 Flaschen her. 2% der Flaschen haben Fehler. Wie viele sind das?

☐ 16 Flaschen ☐ 80 Flaschen ☐ 400 Flaschen
☐ 40 Flaschen ☐ 160 Flaschen

b) Eine Glasfabrik stellt Flaschen her. 2% der Flaschen sind fehlerhaft; dies sind 160 Flaschen. Wie viele Flaschen wurden insgesamt hergestellt?

☐ 320 Flaschen ☐ 3200 Flaschen ☐ 12500 Flaschen
☐ 800 Flaschen ☐ 8000 Flaschen

c) Eine Glasfabrik stellt am Tag 8000 Flaschen her. Erfahrungsgemäß sind ca. 160 Flaschen fehlerhaft. Wie viel Prozent sind das?

☐ 0,02% ☐ 1,28% ☐ 5%
☐ 0,5% ☐ 2%

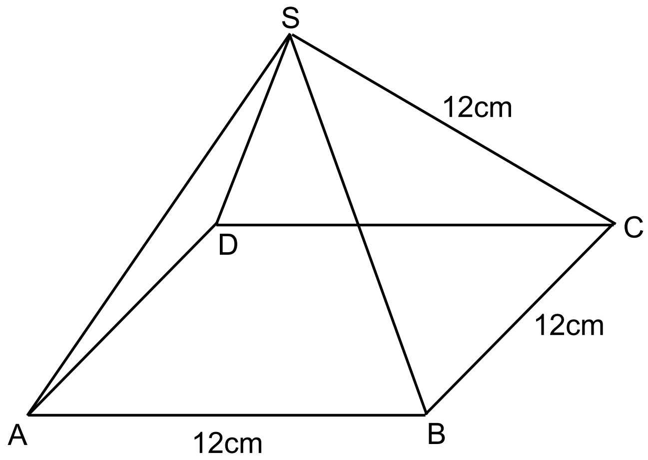
Lehrplanbezug: Prozentrechnung

Pyramide

Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat. Jede Kante der skizzierten Pyramide misst 12 cm.

a) Bestimme den Flächeninhalt der Grundfläche ABCD.

b) Bestimme den Flächeninhalt einer der dreieckigen Seitenflächen.
Erkläre, wie du deine Antwort gefunden hast.



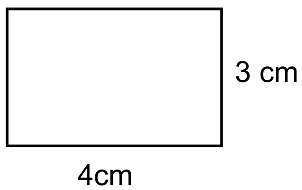
(Bild nicht maßgenau!)

Lehrplanbezug: Flächeninhalt eines Quadrats, Flächeninhalt eines Dreiecks, Satz des Pythagoras

Rechteck

Ein Rechteck ist 4cm lang und 3 cm breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

- ☐ 12 cm²
- ☐ 7 cm
- ☐ 7 cm²
- ☐ 12 cm
- ☐ 14 cm



(*Zeichnung nicht maßgenau!)*

Lehrplanbezug: Flächeninhalt eines Rechtecks

Sparen

Karina hat 1000 DM in ihrem Ferienjob verdient. Ihre Mutter empfiehlt ihr, das Geld zunächst bei einer Bank für 2 Jahre festzulegen (Zinseszins!). Dafür hat sie zwei Angebote:

- „Plus"-Sparen: Im ersten Jahr 3% Zinsen, im zweiten dann 5% Zinsen.
- „Extra"-Sparen: Im ersten und zweiten Jahr jeweils 4% Zinsen.

Karina meint: „Beide Angebote sind gleich gut."
Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort!

Lehrplanbezug: Prozentrechnung, Zinsen

Kategorie 2: Aufgaben zu Stoffgebieten des Lehrplans mit unüblichen Fragen

Beschreibung der Aufgaben

Es handelt sich auch hier um Sach- bzw. Textaufgaben, die sich Stoffgebieten des Lehrplans zuordnen lassen.[1] Allerdings weichen die Fragestellungen von den im Unterricht und in den Übungen bearbeiteten Routinen ab. Wenn solche Fragen in den Lehrbüchern den normalen Trainings- und Übungsaufgaben beigemischt sind, weist vielfach eine Kennzeichnung darauf hin, dass es sich hier um etwas "Besonderes" handelt. Häufig werden in den Lehrbüchern auch eigene Unterabschnitte eines Kapitels für solche "ausgefallenen" Aufgaben gewählt.

Mögliche Ursachen für Defizite bei den Schülerinnen und Schülern

Da in den Übungsphasen im Rahmen der Behandlung eines Stoffgebiets vor allem sichergestellt werden soll, dass bestimmte Aufgabentypen von möglichst vielen Schülerinnen und Schülern beherrscht werden – auch im Hinblick auf die nächste Klassenarbeit – werden Aufgaben oder Aufgabenteile, die sich den Routinen entziehen, in den Übungsphasen eher zurückgestellt und dadurch vernachlässigt.

Werden Schülerinnen und Schüler mit solchen Aufgaben unvermittelt konfrontiert, suchen sie nach einem ihnen bekannten und geläufigen "Rezept" zur Lösung der Aufgabe. Finden sie nicht auf Anhieb ein solches "Rezept", so führen sie verständnislos und oft nicht nachvollziehbar irgendwelche Rechnungen durch oder kapitulieren ganz.

Mögliche unterrichtliche Maßnahmen

- Bei Übungen zu laufendem und zu zurückliegendem Stoff an Routineaufgaben geeignete Zusatzfragen anfügen
- Schülerinnen und Schüler ermutigen und daran gewöhnen, nicht nur nach irgendwann erlernten (und möglicherweise vergessenen) Lösungsschemata zu suchen, sondern inhaltliche Vorstellungen von den einschlägigen Begriffen und Verfahren des behandelten Stoffgebiets zur Grundlage einer eigenen Lösungsstrategie zu machen.

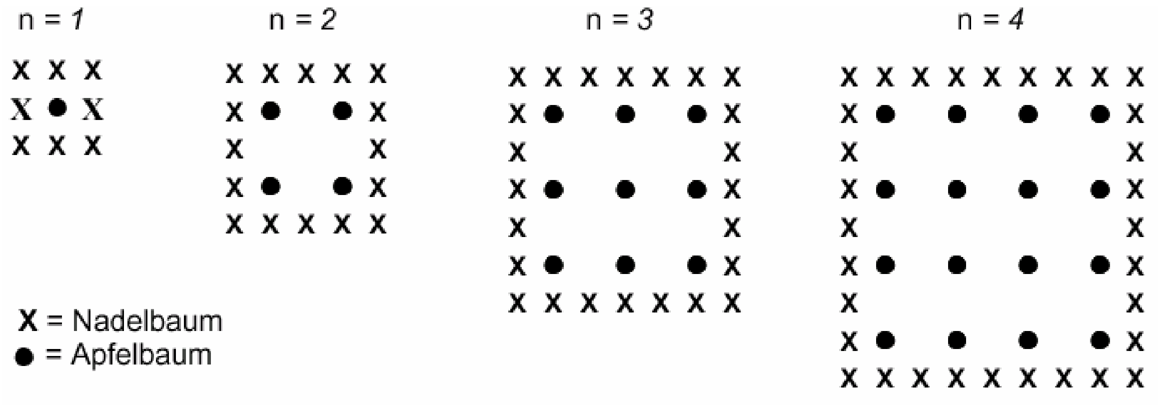
---

[1] In Klassen, in denen das jeweilige Stoffgebiet noch nicht behandelt ist, rückt die Aufgabe in Kategorie 4.

PISA- und TIMSS-Aufgaben

Äpfel

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume an, die er in einem quadratischen Muster anordnet. Um diese Bäume vor dem Wind zu schützen, pflanzt er Nadelbäume um den Obstgarten herum.
Im folgenden Diagramm siehst du das Muster, nach dem Apfelbäume und Nadelbäume für eine beliebige Anzahl (n) von Apfelbaumreihen gepflanzt werden:



a) Vervollständige die Tabelle:

n	Anzahl Apfelbäume	Anzahl Nadelbäume
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

b) Es gibt zwei Formeln, die man verwenden kann, um die Anzahl der Apfelbäume und die Anzahl der Nadelbäume für das oben beschriebene Muster zu berechnen:
Anzahl der Apfelbäume = n^2
Anzahl der Nadelbäume = $8n$
wobei n die Anzahl der Apfelbaumreihen bezeichnet.
Es gibt einen Wert für n, bei dem die Anzahl der Apfelbäume gleich groß ist wie die Anzahl der Nadelbäume. Bestimme diesen Wert und gib an, wie du ihn berechnet hast.

....

....

c) Angenommen, der Bauer möchte einen viel größeren Obstgarten mit vielen Reihen von Bäumen anlegen. Was wird schneller zunehmen, wenn der Bauer den Obstgarten vergrößert: die Anzahl der Apfelbäume oder die Anzahl der Nadelbäume? Erkläre, wie du zu deiner Antwort gekommen bist.

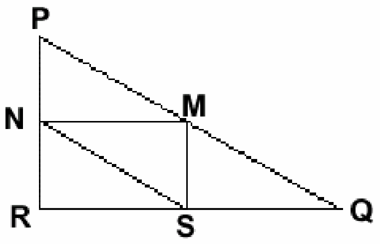
Lehrplanbezug: Gesetzmäßigkeiten erkennen, Terme, lineares und quadratisches Wachstum

Dreiecke

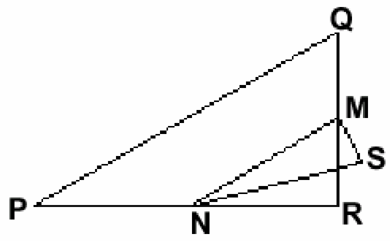
Kreise die Figur ein, die zur folgenden Beschreibung passt:

Das Dreieck PQR hat einen rechten Winkel in R.
Die Strecke $\overline{RQ}$ ist kürzer als die Strecke $\overline{PR}$.
M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ und N ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$.
S ist ein Punkt im Inneren des Dreiecks.
Die Strecke $\overline{MN}$ ist länger als die Strecke $\overline{MS}$.

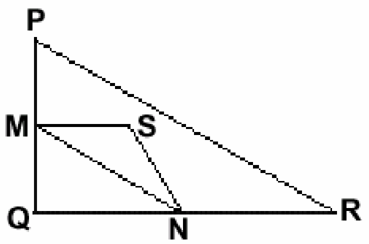
A



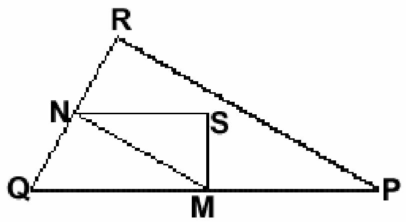
B



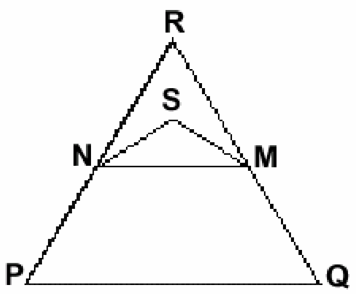
C



D



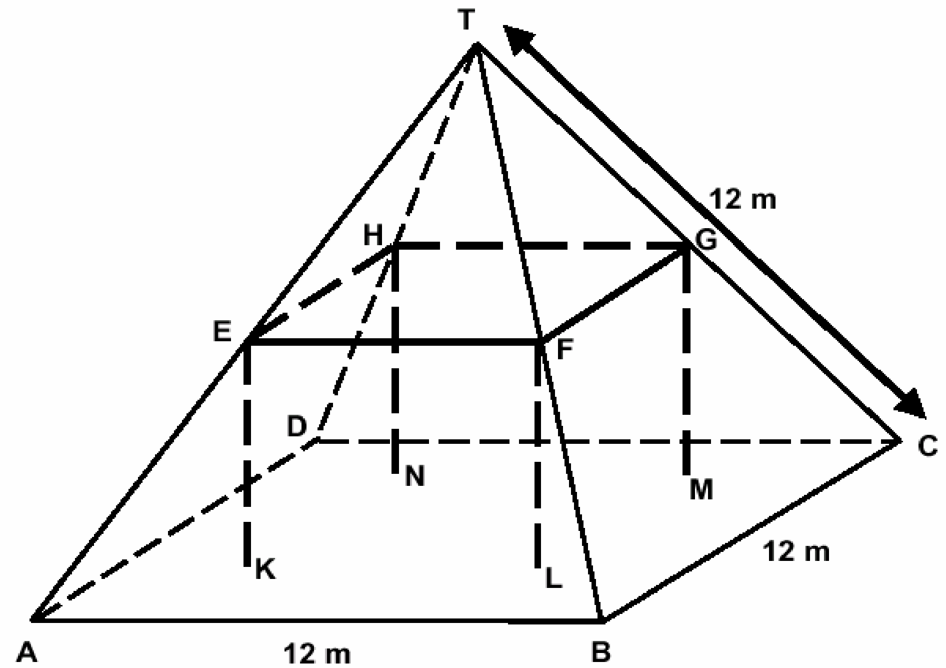
E



Lehrplanbezug: Zuordnung: Text ↔ Bild, Eigenschaften von Dreiecken

Bauernhöfe

Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach. Nachfolgend siehst du eine Skizze mit den entsprechenden Maßen, die eine Schülerin vom Dach des Bauernhauses gezeichnet hat.



Der Dachboden, in der Skizze ABCD, ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten eines Quaders (rechtwinkliges Prisma) EFGHKLMN. E ist die Mitte von $\overline{AT}$, F ist die Mitte von $\overline{BT}$, G ist die Mitte von $\overline{CT}$ und H ist die Mitte von $\overline{DT}$.
Jede Kante der Pyramide in der Skizze misst 12 m.

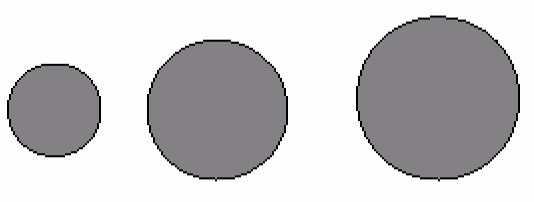
Berechne die Länge von $\overline{EF}$, einer der waagerechten Kanten des Quaders.

Die Länge von $\overline{EF}$ = ____________ m

Lehrplanbezug: Mittelparallele in einem Dreieck

Münzen

Du wirst beauftragt, einen neuen Satz von Münzen zu entwerfen. Alle Münzen sollen rund und silberfarbig sein, aber verschiedene Durchmesser haben. Forscher haben herausgefunden, dass ein idealer Satz von Münzen folgende Anforderungen erfüllt:



Der Durchmesser der Münzen sollte nicht kleiner als 15 mm und nicht größer als 45 mm sein.

- Ausgehend von einer Münze muss der Durchmesser der nächsten Münze mindestens 30 % größer sein.
- Die Prägemaschine kann nur Münzen herstellen, deren Durchmesser in Millimeter ganzzahlig ist (z.B. 17 mm sind zulässig, 17,3 mm nicht).

Entwirf einen Satz von Münzen, der die oben genannten Anforderungen erfüllt. Beginne mit einer 15-Millimeter-Münze. Dein Satz sollte so viele Münzen wie möglich enthalten.

Lehrplanbezug: Prozentrechnung

Büroräume zu vermieten

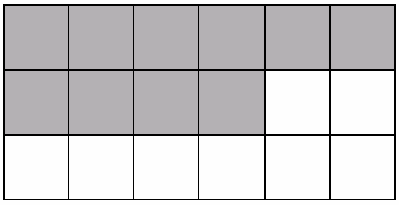
Diese beiden Anzeigen sind in einer Zeitung erschienen in einem Land, in dem die Währungseinheit *zeds* ist.

GEBÄUDE A	GEBÄUDE B
Büroräume zu vermieten	Büroräume zu vermieten
85 - 95 Quadratmeter	35 - 260 Quadratmeter
475 *zeds* pro Monat	90 *zeds* pro Quadratmeter pro Jahr
100 - 120 Quadratmeter	
800 *zeds* pro Monat	

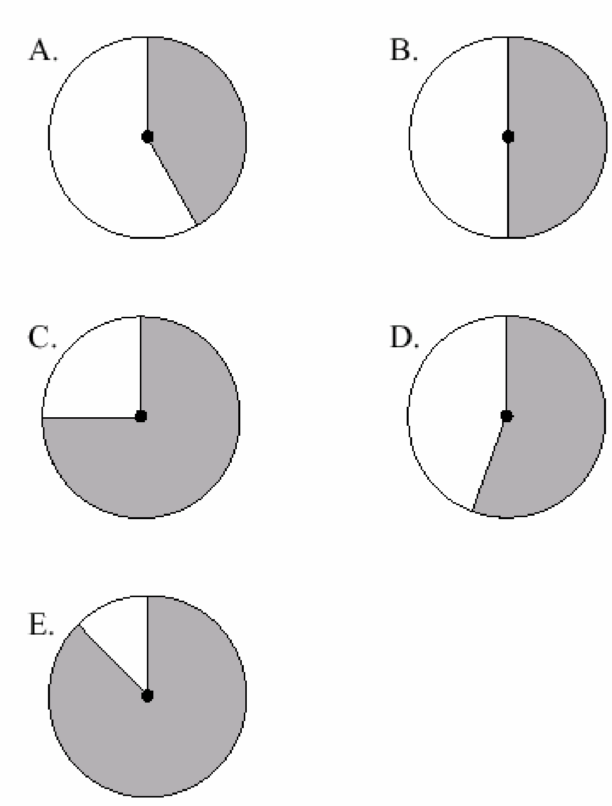
Eine Firma ist daran interessiert, ein 110 Quadratmeter großes Büro in diesem Land für ein Jahr zu mieten. In welchem Bürogebäude, A oder B, sollte sie das Büro mieten, um den niedrigeren Preis zu bekommen? Wie rechnest du?

Lehrplanbezug: Größen mit unterschiedlichen, zusammengesetzten Einheiten miteinander vergleichen

Bruchteile



In welchem Kreis ist ungefähr der gleiche Bruchteil schattiert wie im Rechteck oben?



Lehrplanbezug: Bruchzahlen, unterschiedliche Darstellungsformen für Bruchzahlen

Wohnhausmiete

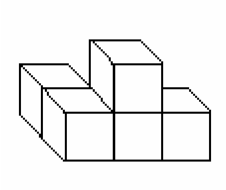
In einer Großstadt kostete 1985 eine 70 m²-Wohnung 1000 DM Miete pro Monat. Seit 1985 stieg der Mietpreis alle 5 Jahre um 20%.

Welche Monatsmiete musste dann 1995 für diese Wohnung gezahlt werden?
Schreibe auf, wie du rechnest.

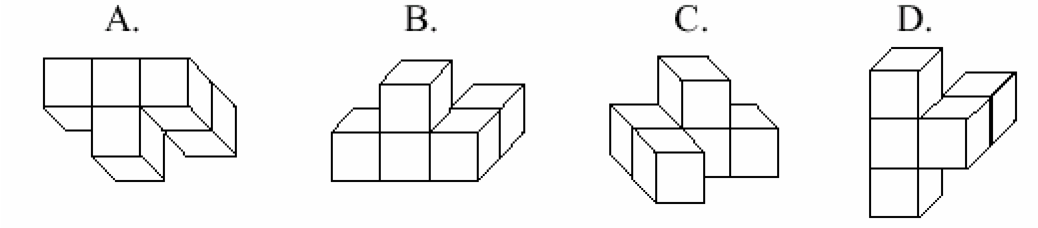
Lehrplanbezug: Verkettung von Prozentsätzen

Gedrehte Figur

Diese Figur wird in eine andere Lage gedreht.

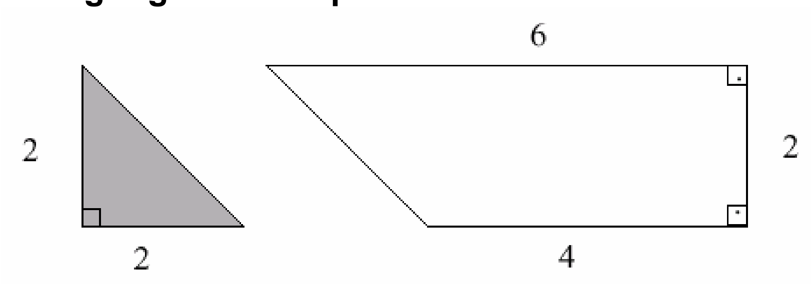


Welche der folgenden Figuren erhält man, wenn man die obenstehende dreht?



Lehrplanbezug: Räumliches Vorstellungsvermögen

Zerlegung eines Trapezes



In wie viele Dreiecke, die die Größe und Form des schattierten Dreiecks haben, kann das Trapez zerlegt werden?

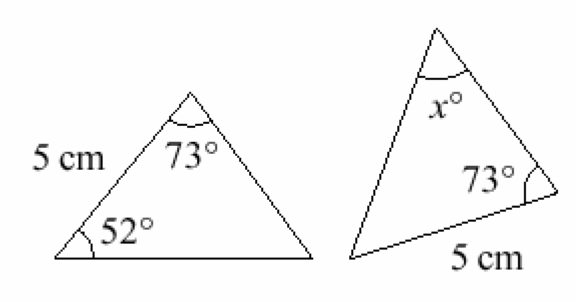
- [ ] Drei
- [ ] Vier
- [ ] Fünf
- [ ] Sechs

Lehrplanbezug: Parkettierung

Winkel bestimmen

Die abgebildeten Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich). Die Maße einiger Seiten und Winkel sind angegeben.
Wie groß ist x ?

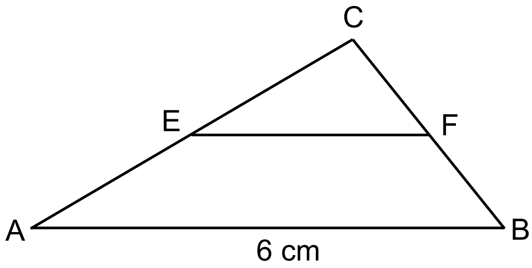
- ☐ 52
- ☐ 55
- ☐ 65
- ☐ 73
- ☐ 75



Lehrplanbezug: Winkelsumme im Dreieck, ebenes Vorstellungsvermögen

Dreieck

Die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC ist 6cm lang. Es werden die Mittelpunkte E und F der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eingezeichnet. Wie lang ist $\overline{EF}$?



(Bild nicht maßgenau!)

Lehrplanbezug: Mittelparallele in einem Dreieck

Geobretter

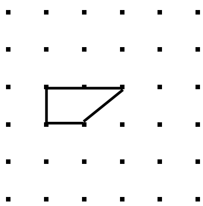


Abb. 1

Die Abbildung oben zeigt ein Geobrett. Figuren werden mit Gummibändern um die Nägelchen gelegt. Das Gummiband in der Abbildung 1 berührt genau fünf Nägelchen und umspannt 1 ½ Flächeneinheiten.

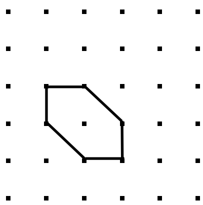


Abb. 2

Die Figur in Abb. 2 berührt 6 Nägelchen und umspannt 3 Flächeneinheiten.

a) Bestimme die Fläche der Figur in Abb. 3!

☐ 3 Flächeneinheiten
☐ 4 FE
☐ 5 FE
☐ 6 FE

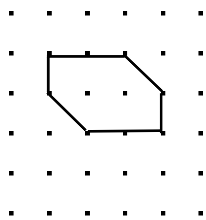


Abb. 3

b)

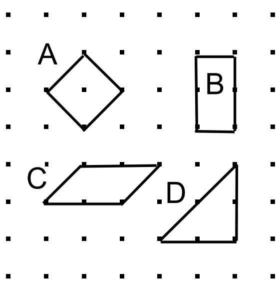
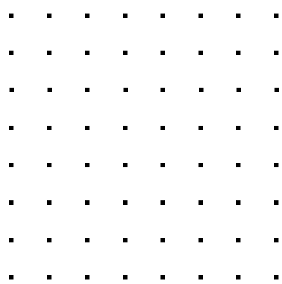


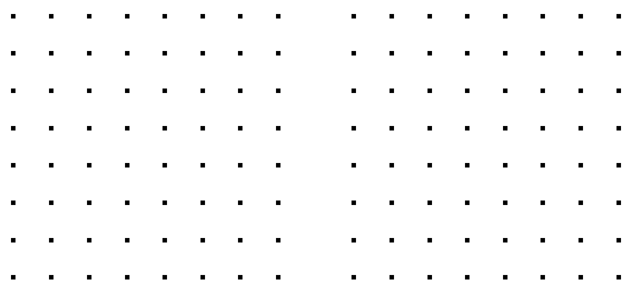
Abb. 4

Färbe in Abb. 4 die Figuren mit gleichem Flächeninhalt ein!

c) Zeichne in das Gitter eine Figur, die genau 5 Nägelchen berührt und einen Flächeninhalt von 2 ½ FE besitzt.



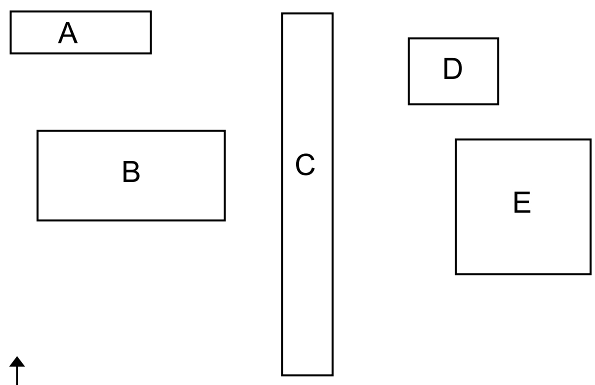
d) Billy behauptet, dass alle Figuren, die genau vier Nägelchen berühren, den gleichen Flächeninhalt haben.Zeichne in die unteren Gitter zwei Figuren, die zwar genau 4 Nägelchen berühren, aber unterschiedlichen Flächeninhalt haben.

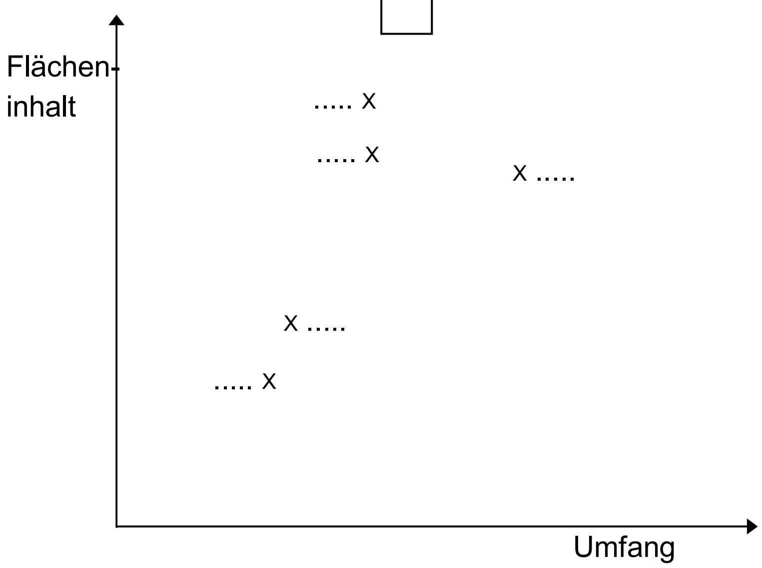


Lehrplanbezug: Vorstellungen von Flächeninhalten

Rechtecke

Gegeben sind fünf Rechtecke, A bis E.
Schreibe die Buchstaben für alle Rechtecke an die passende Stelle im Graphen.





Lehrplanbezug: Vergleich: Umfang ↔ Flächeninhalt

Weitere Aufgaben

Eine Unfallmeldung

> **Zwölfjähriger bei Unfall verletzt**
> Mit erheblichen Verletzungen ins Krankenhaus kam ein zwölf Jahre alter Junge, der in der Rhein-Mosel-Straße von einem Pkw erfasst wurde. Der Junge war aus dem Hauseingang auf die Straße gelaufen, ohne auf den fließenden Verkehr zu achten. Der 40 Jahre alte Pkw-Fahrer konnte trotz Vollbremsung den Zusammenprall nicht verhindern und hinterließ dabei eine 36 m lange Bremsspur.

Faustregel aus der Fahrschule:

„Den Bremsweg in m erhält man, wenn man die Geschwindigkeit in km/h durch 10 dividiert und das Ergebnis quadriert."

Was kann man über die Geschwindigkeit des Autos aussagen?

Lehrplanbezug: Zuordnungen, Gleichungen

Lösung:
Nach der Faustregel fuhr der Fahrer mit etwa 60 km/h.

Kommentar:
Die Schülerinnen und Schüler können auf verschiedenen Wegen zur Lösung gelangen.

(1) Durch systematisches Probieren erhalten sie die Antwort.
(z.B. Zuordnungstabelle *Geschwindigkeit* → *Bremsweg*)

(2) Sie stellen zunächst eine Gleichung (z.B. $\left(\frac{x}{10}\right)^2 = 36$) auf, die sie anschließend lösen.

(3) Durch „rückwärts rechnen" erhalten sie das Ergebnis:

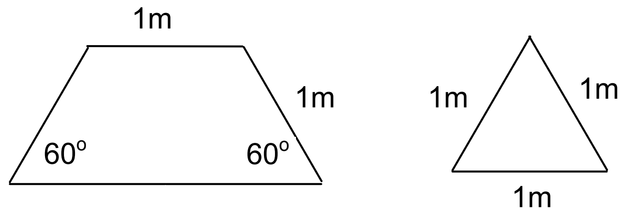
Regel: Geschwindigkeit in km/h $\xrightarrow{:10}$ Ergebnis $\xrightarrow{\text{quadrieren}}$ Bremsweg in m

rückwärts rechnen: $60 \xleftarrow{\bullet 10} 6 \xleftarrow{\text{quadrieren–rückgängig}} 36$

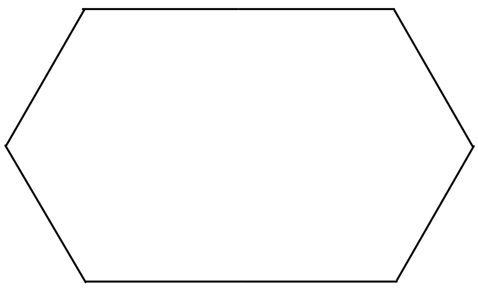
Die verschiedenen Lösungswege können nebeneinander gestellt und diskutiert werden.

Tagungstische

In einem Tagungshaus stehen folgende Tischelemente in größerer Stückzahl zur Verfügung:



a) Aus solchen Elementen wird folgender Tisch zusammengestellt:



Gib verschiedene Möglichkeiten an.

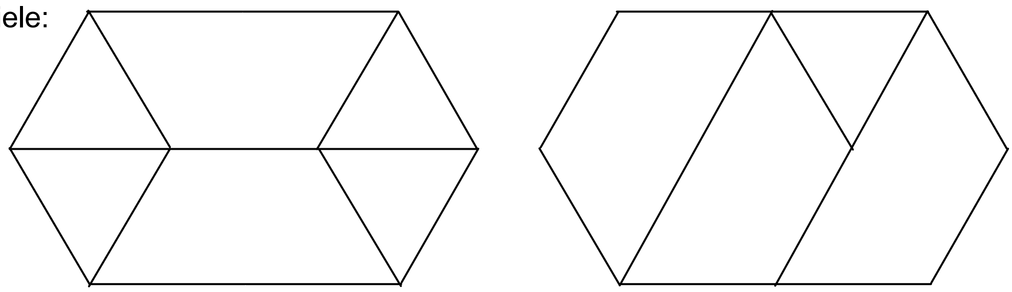
b) Kann man ein trapezförmiges Tischelement durch dreieckige ersetzen? Begründe deine Antwort.

c) Der Hausmeister sagt: Aus diesen Elementen kann man keinen rechteckigen Tisch zusammenstellen. Hat er Recht? Erkläre deine Antwort.

Lehrplanbezug: symmetrische Dreiecke und Trapeze

Lösung:

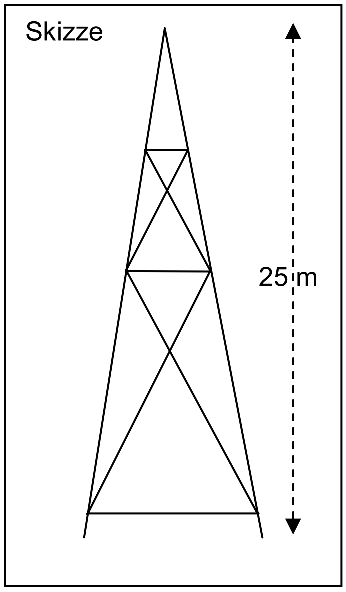
a) Beispiele:



b) Man kann ein Trapez durch 3 Dreiecke ersetzen. Das ist möglich, da das Dreieck gleichseitig ist und deshalb alle drei Winkel 60° groß sind, die beiden stumpfen Winkel im Trapez jeweils 120° groß sind, und die kürzere der beiden parallelen Seiten des Trapezes 1 m lang ist.

c) Der Hausmeister hat Recht. In beiden Tischelementen kommen nur 60°- und 120°-Winkel vor. Aus diesen kann man keinen 90°-Winkel zusammenstellen.

Konstruktion von Bohrtürmen



Für die Erschließung eines Erdölfeldes werden die Bohrtürme geplant.

Ein Bohrturm soll eine Höhe von 25 m haben und wie in der Skizze angedeutet konstruiert werden. Die beiden oberen waagerechten Streben müssen zur Montage der Bohrgestänge in einer Höhe von 19 m bzw. 13 m angebracht werden, die letzten Streben an den Fundamenten 1 m über dem Boden. Die Berechnungen zur Statik haben ergeben, dass die unteren waagerechten Streben eine Länge von 9,8 m haben müssen.

Wie lang müssen die einzelnen waagerechten Streben sein?

Lehrplanbezug: Strahlensätze

Lösung:
Anwendung der Strahlensätze liefert: Die Querstreben sind 2,45 m, 4,9 m und 9,8 m lang.

Gehaltserhöhungen

Was gibt am Ende das höhere Gehalt: Fünfmal hintereinander eine Gehaltserhöhung um 10% oder eine einmalige Erhöhung um 60%?

Lehrplanbezug: Prozentrechnung

Lösung:
Fünfmalige Erhöhung um 10% ergibt eine Gesamterhöhung von 61,051% und damit ein höheres Gehalt.

Kommentar:
Im Aufgabentext fehlt scheinbar der Grundwert. Es kann auf die Annahme eines konkreten Gehaltes als mögliche Strategie bei der Lösung von Aufgaben dieses Typs hingewiesen werden.

Kategorie 3: Aufgaben, die nicht an spezielle Stoffgebiete des Lehrplans gebunden sind

Beschreibung der Aufgaben

Zu dieser Kategorie gehören Sach- bzw. Textaufgaben, die nicht *einem* bestimmten Stoffgebiet des Lehrplans zugeordnet werden können. Zur Lösung solcher Aufgaben sind mathematische Kompetenzen erforderlich, die in *vielen* Bereichen der Mathematik, aber auch zur Bewältigung entsprechender Problemstellungen in anderen Fächern benötigt werden. Darüber hinaus werden durch die Beschäftigung mit diesen Aufgaben Fähigkeiten geweckt und gefördert, die die Schülerinnen und Schülern darauf vorbereiten, mathematische Fragestellungen in Berufs- und Alltagssituationen anzugehen und erfolgreich zu bearbeiten.

Die folgenden Beispiele konzentrieren sich auf zwei Bereiche:
- das Deuten von Graphen
- das Interpretieren von stochastischen Aussagen[1]

Mögliche Ursachen für Defizite bei den Schülerinnen und Schülern

Da diese Aufgaben keinem Stoffgebiet und keinem Schuljahr fest zugeordnet werden können, werden sie häufig ganz vernachlässigt. Den Schülerinnen und Schülern sind also einschlägige Strategien zur Lösung entsprechender Aufgaben unbekannt.

Mögliche unterrichtliche Maßnahmen

Aufgaben dieser Art sollten regelmäßig in die Übungen zum "laufenden Stoff" eingestreut und in sehr unterschiedlichen Kontexten geübt werden. Besonders geeignet für die Beschäftigung mit Problemstellungen dieser Art sind erfahrungsgemäß auch Vertretungsstunden.

---

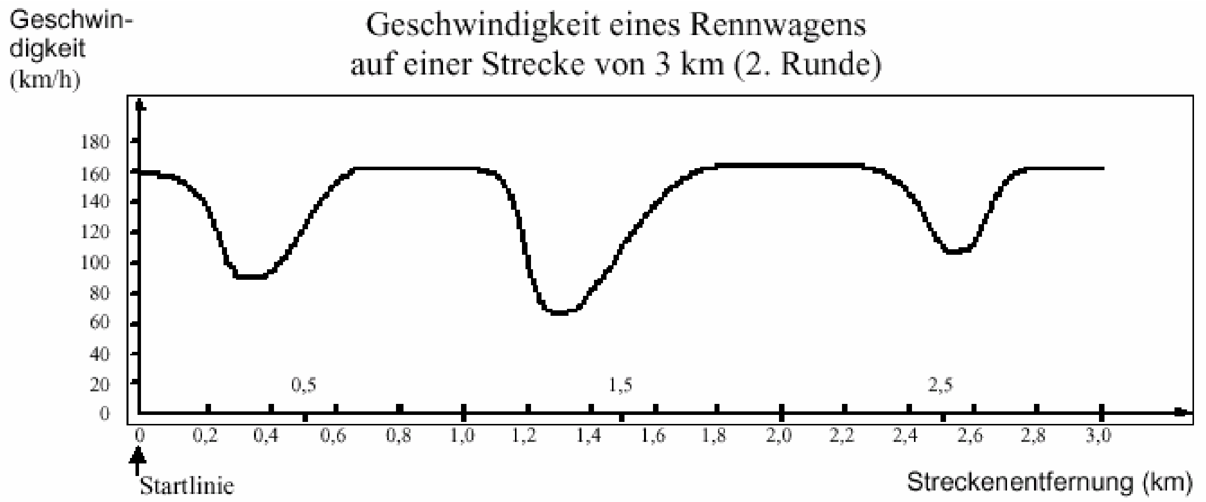
[1] Beachte: Hinweis zu 3.2 auf Seite 44

3.1 Graphen deuten

PISA- und TIMSS-Aufgaben

Geschwindigkeit eines Rennwagens

Dieser Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.



a) Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geradlinigen Abschnitts der Rennstrecke?

- ☐ 0,5 km
- ☐ 1,5 km
- ☐ 2,3 km
- ☐ 2,6 km

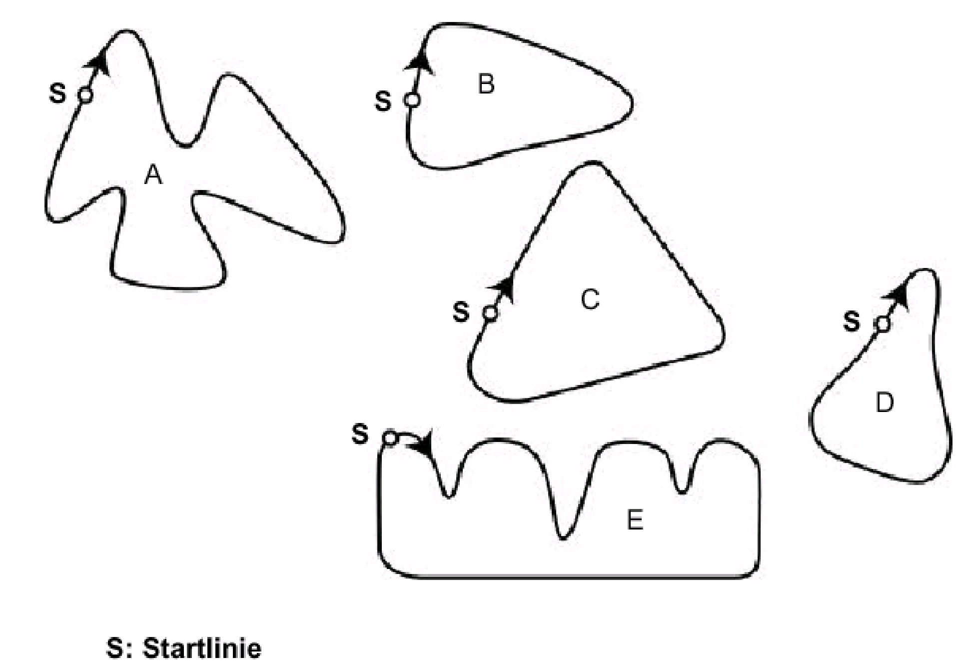
b) Wo wurde während der zweiten Runde die geringste Geschwindigkeit gemessen?

- ☐ an der Startlinie
- ☐ bei etwa 0,8 km
- ☐ bei etwa 1,3 km
- ☐ nach der halben Runde

c) Was kannst du über die Geschwindigkeit des Wagens zwischen den Markierungen 2,6 km und 2,8 km sagen?

- ☐ Die Geschwindigkeit des Wagens bleibt konstant.
- ☐ Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
- ☐ Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt ab.
- ☐ Die Geschwindigkeit des Wagens kann anhand des Graphen nicht bestimmt werden.

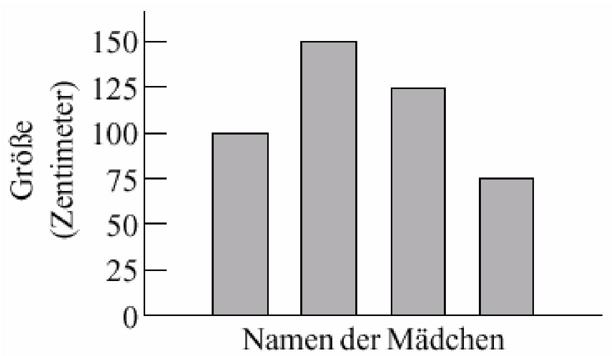
d) Hier siehst du Abbildungen von fünf Rennstrecken:
Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, sodass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



Lösungen:
a) 1,5 km b) 1,3 km c) Die Geschwindigkeit nimmt zu.
d) B

Vier Mädchen

Die Grafik zeigt die Größe von 4 Mädchen. Die Namen fehlen in der Grafik. Kathrin ist die Größte, Barbara die Kleinste. Carmen ist größer als Maja.
Wie groß ist Maja?



- ☐ 75 cm
- ☐ 100 cm
- ☐ 125 cm
- ☐ 150 cm

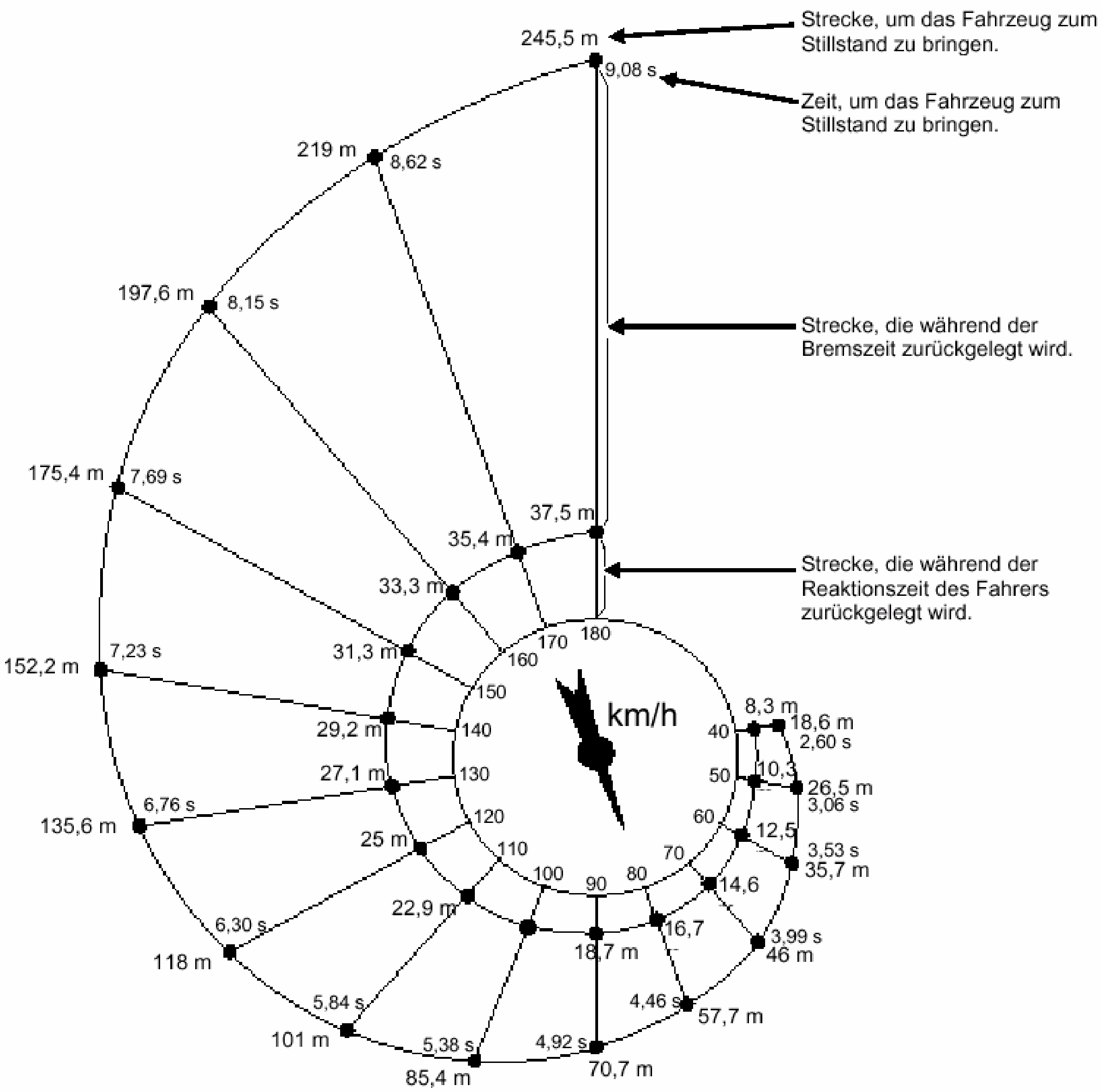
Lösung:
Maja ist 100 cm groß.

Bremsen

Die in etwa benötigte Strecke, um ein Fahrzeug zum Stillstand zu bringen, setzt sich zusammen aus:

– der Strecke, die zurückgelegt wird, bis der Fahrer die Bremse betätigt (Reaktionsweg) und
– der Strecke, die während der Betätigung der Bremse zurückgelegt wird (Bremsweg).

Das unten abgebildete „Schneckendiagramm“ gibt den theoretischen Anhalteweg für ein Fahrzeug unter guten Bremsbedingungen an (ein besonders aufmerksamer Fahrer, Bremsen und Reifen in tadellosem Zustand, trockene Straße mit einer guten Oberfläche) und zeigt, inwiefern der Anhalteweg von der Geschwindigkeit abhängt.



a) Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von 110 km/h. Welche Strecke legt es während der Reaktionszeit des Fahrers zurück?

b) Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von 110 km/h. Welche Strecke wird insgesamt zurückgelegt, bis das Fahrzeug zum Stillstand kommt?

c) Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von 110 km/h. Wie lange dauert es, um das Fahrzeug vollkommen zum Stillstand zu bringen?

d) Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von 110 km/h. Welche Strecke wird während der Betätigung der Bremsen zurückgelegt?

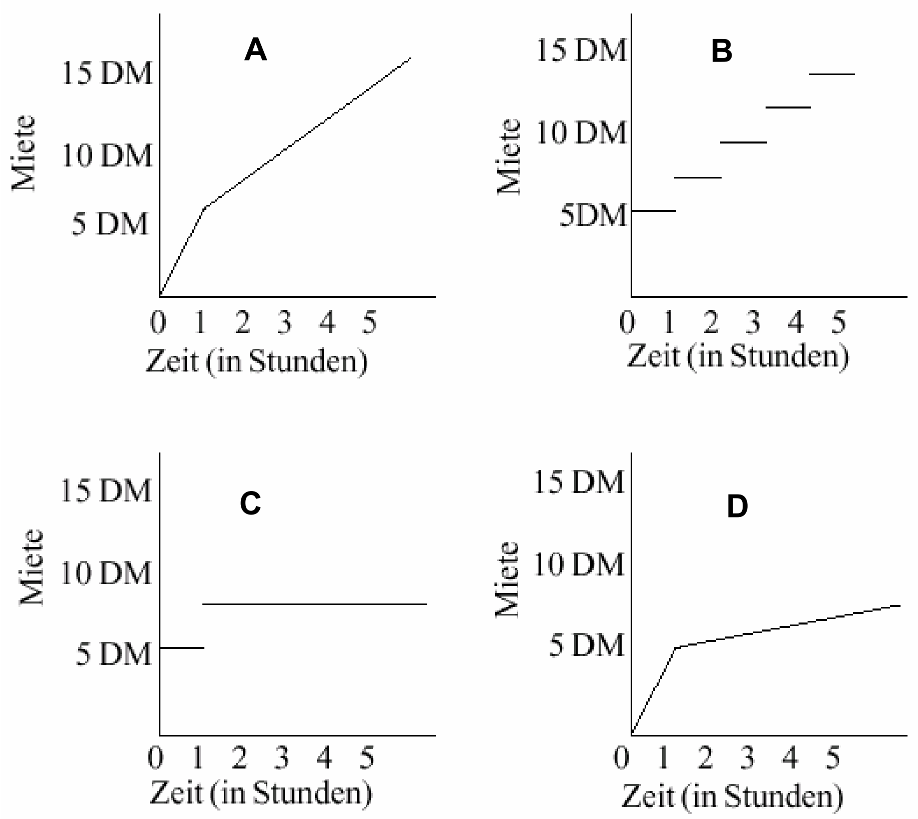
e) Eine zweite Fahrerin, die bei guten Fahrbedingungen unterwegs ist, bringt ihr Fahrzeug nach einer Gesamtstrecke von 70,7 Metern zum Stehen. Mit welcher Geschwindigkeit fuhr das Fahrzeug vor dem Betätigen der Bremsen?

Lösungen:

a) 22,9 m   b) 101 m   c) 5,84 s   d) 78,1 m   e) 90 km/h

Fahrradmiete

In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde (oder ein Teil davon) kostet 5 DM und jede weitere angefangene Stunde kostet 2 DM. Welches Diagramm zeigt dies?

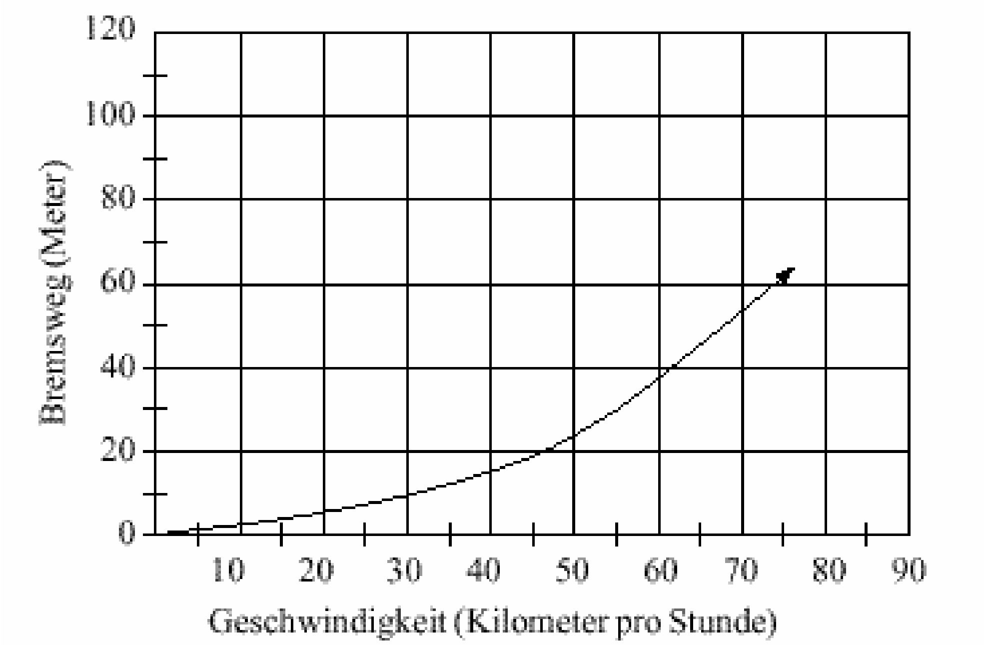


Lösung:

Diagramm B

Bremswege

Die Grafik zeigt zu verschiedenen Geschwindigkeiten eines Autos die Strecke, die man benötigt, um das Auto durch Betätigen der Bremse zum Anhalten zu bringen (Bremsweg).



a) Auf einer Landstraße fährt ein Auto. Es bremst und kommt nach 30 m zum Stillstand. Wie schnell ist es ungefähr gefahren?

- ☐ 48 km pro Stunde
- ☐ 55 km pro Stunde
- ☐ 70 km pro Stunde
- ☐ 160 km pro Stunde

b) Ein Auto fährt 80 km pro Stunde. Wie lang ist ungefähr der Bremsweg für das Auto?

- ☐ 65 m
- ☐ 70 m
- ☐ 80 m
- ☐ 100 m

Lösungen:

a) 55 km/h   b) 70 m

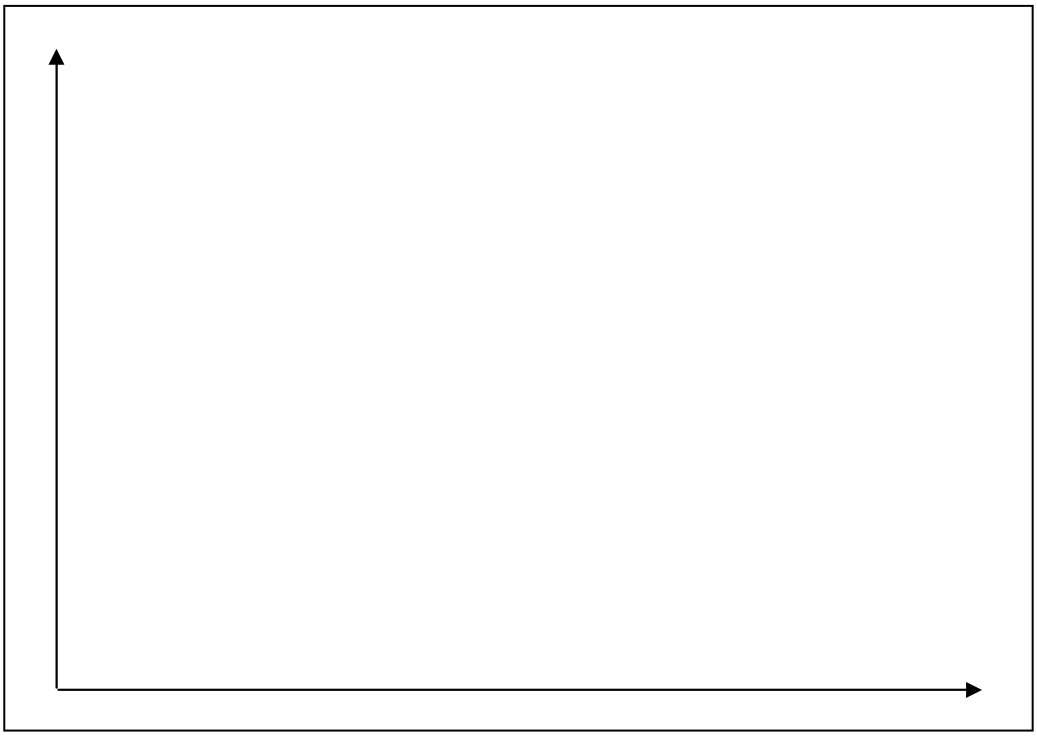
Bakterien und ihr Wachstum

Das Wachstum von Bakterien wird durch die Daten der folgenden Tabelle wiedergegeben:

Generation	Anzahl der Bakterien
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512

Generation	Anzahl der Bakterien
11	1024
12	2048
13	4096
14	8192
15	16384
16	32768
17	65536
18	131072
19	262144
20	524288

a) Zeichne in das angegebene Koordinatensystem einen Graphen, der das Wachstum mit den in der Tabelle gegebenen Daten veranschaulicht.



b) In welcher Generation wird bei dieser Wachstumsrate die Bakterienpopulation erstmals eine Größe von 100 000 000 erreichen?

☐ Generation 26 ☐ Generation 27
☐ Generation 28 ☐ Generation 29

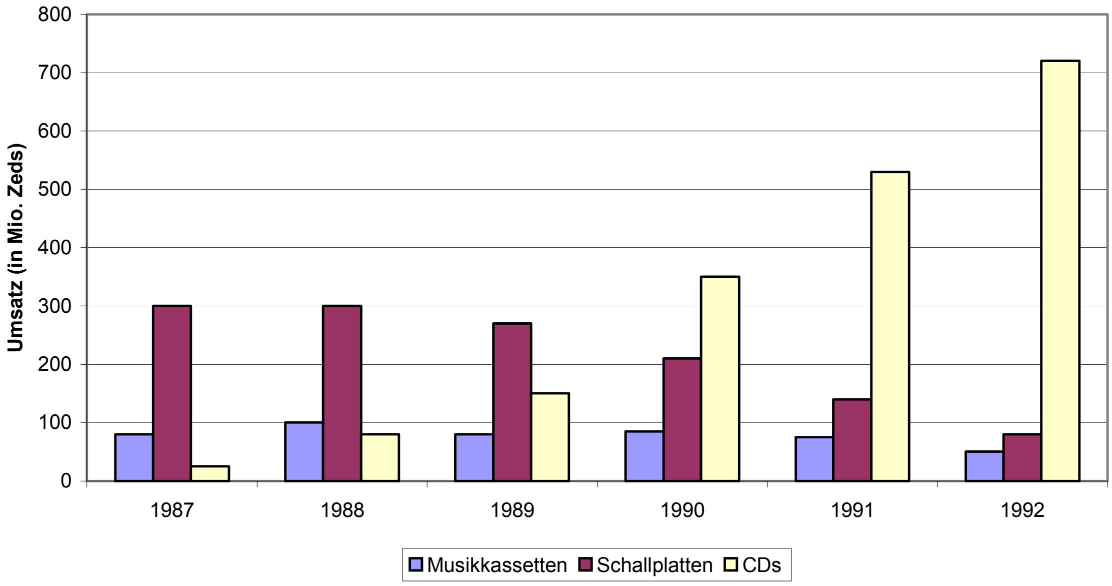
Lösung:

b) 28

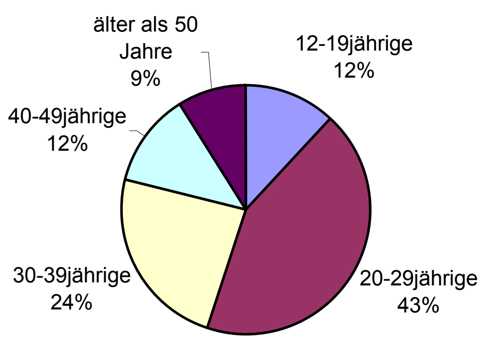
CD–Verkaufszahlen

Die Grafiken geben Auskunft über den Verkauf von CDs und anderen Musikmedien in Zedland. Zeds sind die in Zedland gültige Währung.
Ermittle mit Hilfe der beiden Grafiken, wieviel Geld die 12- bis 19-jährigen Käufer 1992 ungefähr für CDs ausgegeben haben.

Umsatzzahlen verschiedener Musikmedien, die in Zedland verkauft wurden (in Millionen von Zeds)



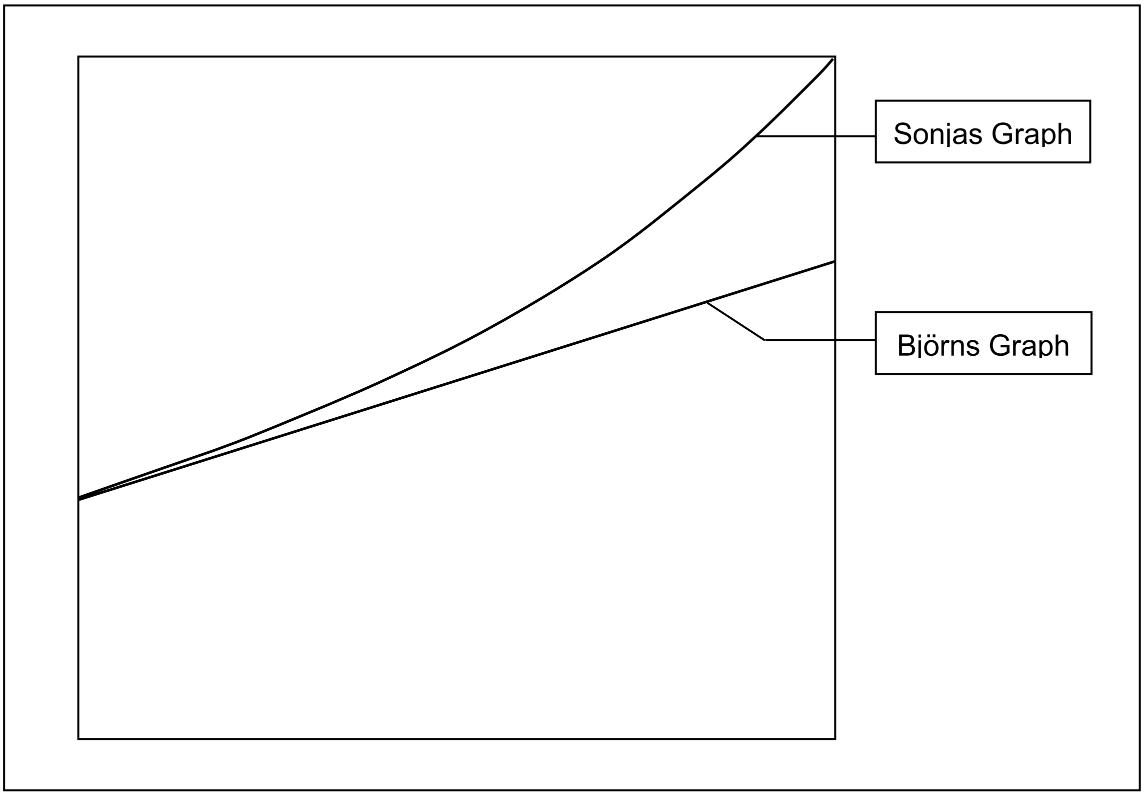
CD - Verkäufe nach Altersgruppen



Lösung:
Ausgaben für CDs: 12% von ca. 720 Mio. Zeds, das sind ca. 86,4 Mio. Zeds

Bevölkerungswachstum

Ein Land hatte im Jahr 1998 eine Bevölkerung von 5 Millionen und eine Wachstumsrate von 20% pro Jahr.
Björn und Sonja haben jeweils Graphen gezeichnet, von denen sie annehmen, dass sie das Bevölkerungswachstum dieses Landes in den nächsten Jahren darstellen.



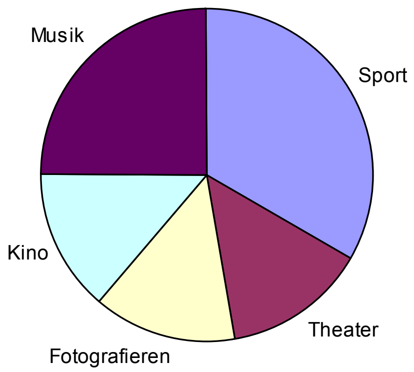
Welcher Graph stellt das Bevölkerungswachstum besser dar? Begründe deine Antwort.

Lösung:
Sonjas Graph stellt das Wachstum besser dar. Björns Graph beschreibt ein Wachstum, bei dem die Bevölkerung jedes Jahr um die gleiche Anzahl Menschen zunimmt. Wenn die Wachstumsrate dagegen 20% beträgt, dann nimmt die Bevölkerung von Jahr zu Jahr um eine größere Anzahl Menschen zu.
Beispiel: 1. Jahr: 20 % von 5 Mio. = 1 000 000 $\rightarrow$ Bevölkerung: 6 Mio.
2. Jahr: 20 % von 6 Mio. = 1 200 000

Schüler und ihre Freizeitaktivitäten

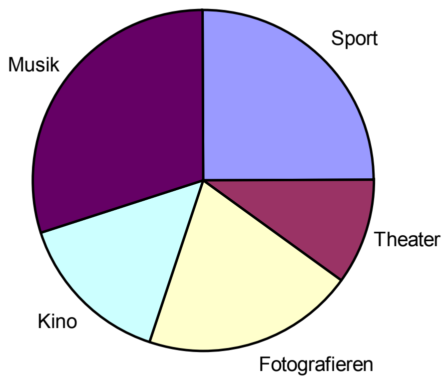
1200 Schüler wurden nach ihren bevorzugten Freizeitaktivitäten befragt und die Ergebnisse nach Alter sortiert. Die beiden Diagramme zeigen die Ergebnisse.
240 Schüler waren 15 Jahre und jünger, 960 waren älter als 15 Jahre.

Bevorzugte Freizeitaktivitäten von 240 Schülern bis 15 Jahre



30 Schüler bis 15 Jahre und 96 Schüler über 15 Jahre gaben Theaterbesuche als bevorzugtes Hobby an.

Bevorzugte Freizeitaktivitäten von 960 Schülern über 15 Jahre



Erkläre, warum das entsprechende Segment im Diagramm für die bis 15-jährigen größer ist als das entsprechende Segment der über 15-jährigen, die das Theater bevorzugen!

Lösung:
Der Anteil der bis 15-Jährigen, die das Theater bevorzugen, beträgt $\frac{30}{240} = \frac{1}{8}$

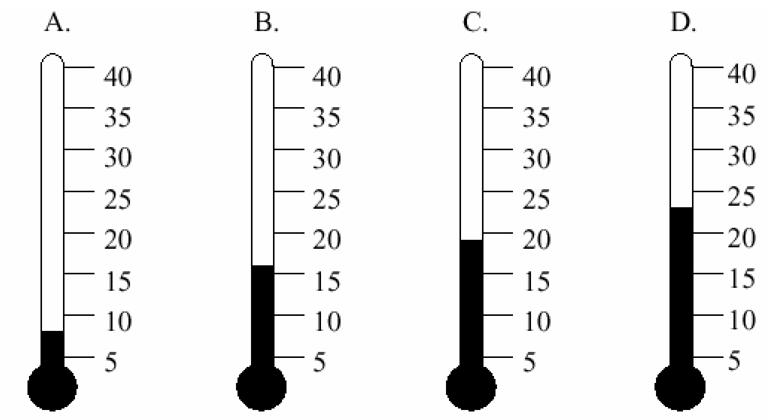
Der Anteil der über 15-Jährigen, die das Theater bevorzugen, beträgt $\frac{96}{960} = \frac{1}{10}$

Temperaturen

Diese Tabelle zeigt die Temperaturen zu verschiedenen Zeiten in der Woche.

TEMPERATUREN					
	6 Uhr	9 Uhr	12 Uhr	17 Uhr	20 Uhr
Montag	15°	17°	20°	21°	19°
Dienstag	15°	15°	15°	10°	9°
Mittwoch	8°	10°	14°	13°	15°
Donnerstag	8°	11°	14°	17°	20°

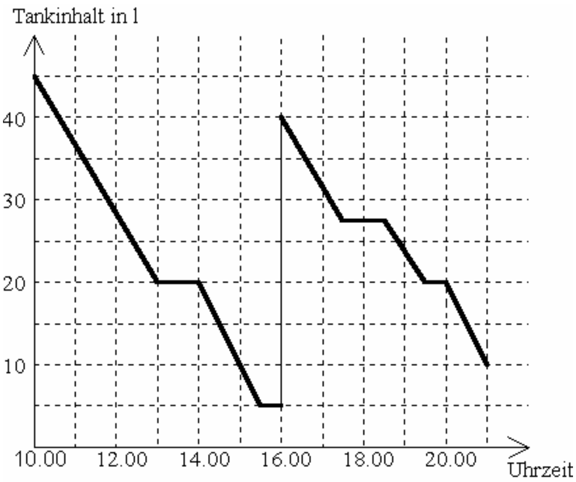
Welches Thermometer zeigt die Temperatur am Montag um 20 Uhr an?



Weitere Aufgaben

Tankinhalt

Das Diagramm zeigt, wie viel Benzin sich zu jedem Zeitpunkt einer Reise im Tank eines Fahrzeugs befindet



a) Beschreibe knapp, was um 16.00 Uhr geschieht.

b) Wie viele Liter Benzin hat das Auto auf der um 10.00 Uhr beginnenden und 21.00 Uhr endenden Reise verbraucht?

c) Beschreibe den Verlauf der Fahrt zwischen 12.00 und 15.00 Uhr!

Lösungen:

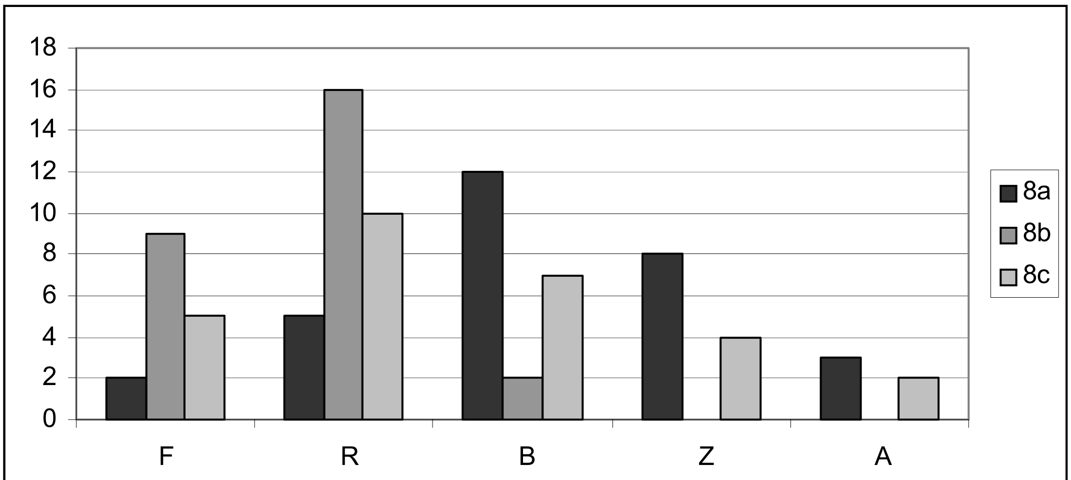
a) Im Tank sind nur noch 5 l Benzin; es werden 35 l getankt.

b) 40 l + 30 l = 70 l

c) Das Auto fährt zwischen 12.00 und 13.00 Uhr mit gleichmäßigem Benzinverbrauch, es steht vermutlich von 13.00 bis 14.00 Uhr und fährt von 14.00 bis 15.00 Uhr gleichmäßig weiter.

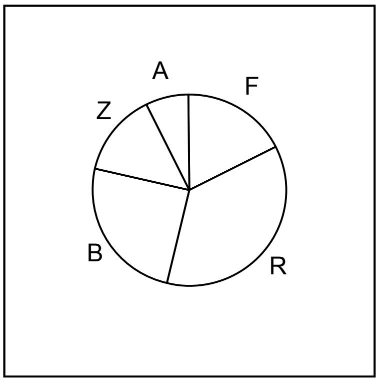
Schulweg

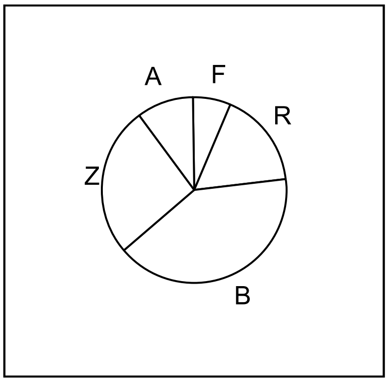
Die Schülerinnen und Schüler einer 8. Jahrgangsstufe wurden befragt, auf welche Art sie am Morgen in die Schule kommen. Die Verteilung für die Klassen 8a, 8b und 8c ergibt sich aus folgendem Säulendiagramm:

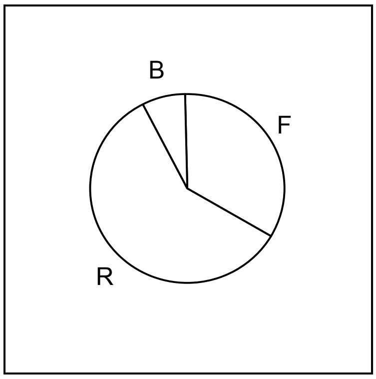


(zu Fuß F, Fahrrad R, Bus B; Zug Z, Auto A)

Ordne der Klasse 8a das entsprechende Kreisdiagramm zu:



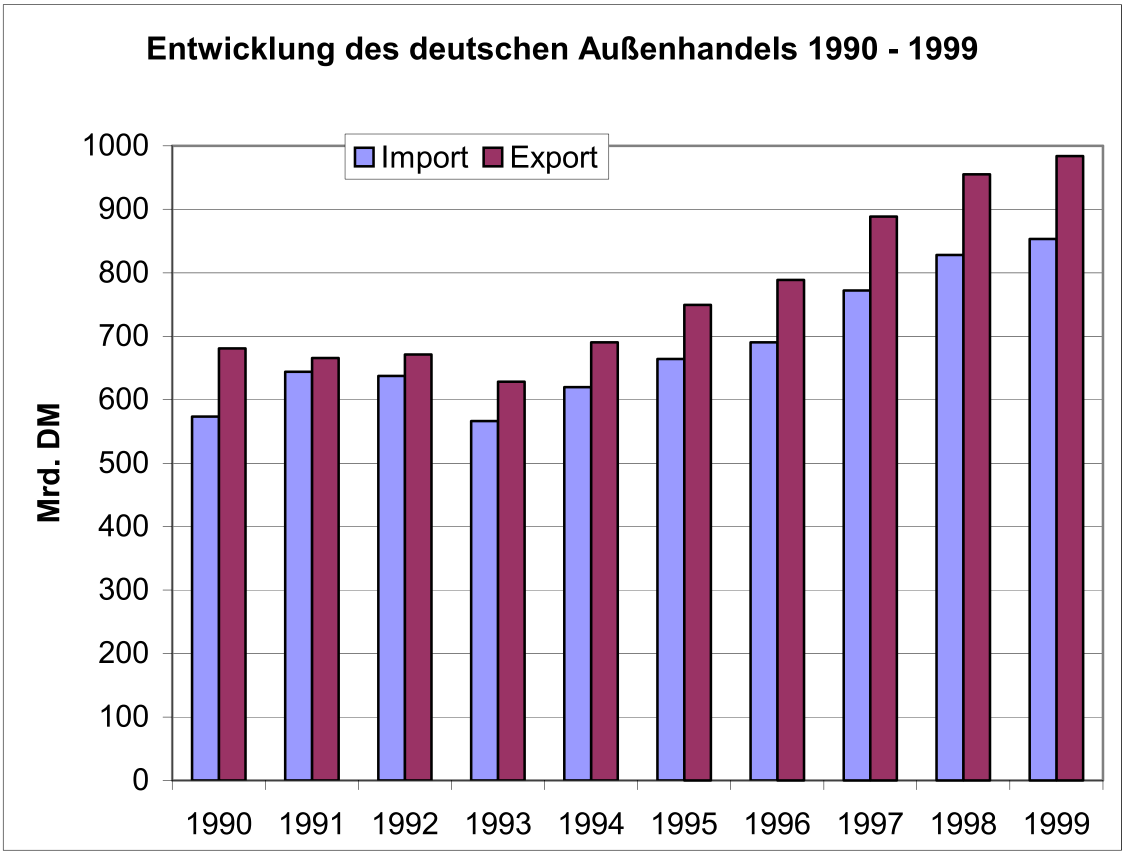




Lösung:
Zur Klasse 8a gehört das mittlere Kreisdiagramm.

Die Entwicklung des Außenhandels

Für die Handelsbilanz eines Landes ist die Entwicklung des Exportes (Ausfuhr von Waren in andere Länder) wichtig. Dieser wird dem Import (Einfuhr von Waren aus dem Ausland) gegenübergestellt. Den Unterschied zwischen Export und Import bezeichnet man als Ausfuhrüberschuss. Laut Statistischem Bundesamt 2000 ergaben sich für das letzte Jahrzehnt folgende Werte:



a) Lies den Maximal- und den Minimalwert für die Ausfuhr von Waren ab.

b) In welchem Jahr ist der Ausfuhrüberschuss am kleinsten?

c) Vergleiche das Wachstum von Import und Export im Zeitraum von 1993 bis 1999.

Lösungen:

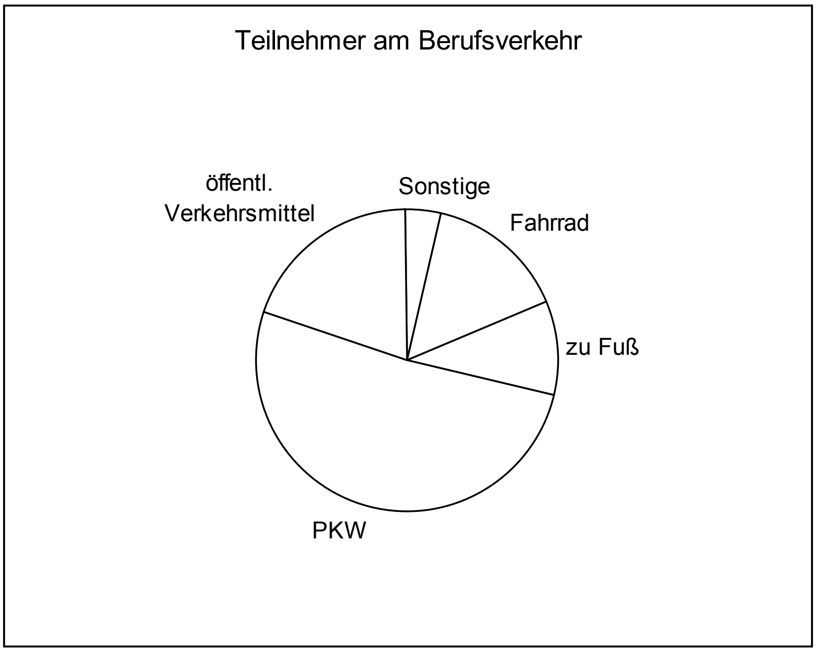
a) Maximalwert: 1999: fast 1000 Mrd. DM, Minimalwert: 1993: knapp 650 Mrd. DM

b) 1991

c) Beide sind nur gewachsen, der Export stärker als der Import.

Teilnehmer am Berufsverkehr

Im vergangenen Jahr fuhren in Mathland ca. 7 Millionen, das waren etwa Hälfte aller Teilnehmer am Berufsverkehr, mit dem Auto zur Arbeit. Das Diagramm zeigt die Verteilung der Verkehrsteilnehmer auf die verschiedenen Verkehrsmittel.



a) Wieviel Prozent der Verkehrsteilnehmer benutzten das Fahrrad?

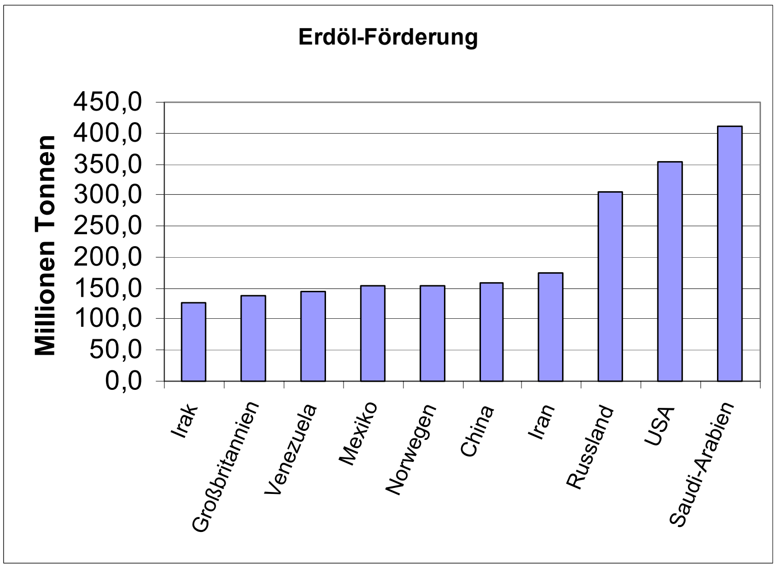
b) Wie viele Menschen gingen zu Fuß zur Arbeit?
Gib jeweils ungefähre Werte an!

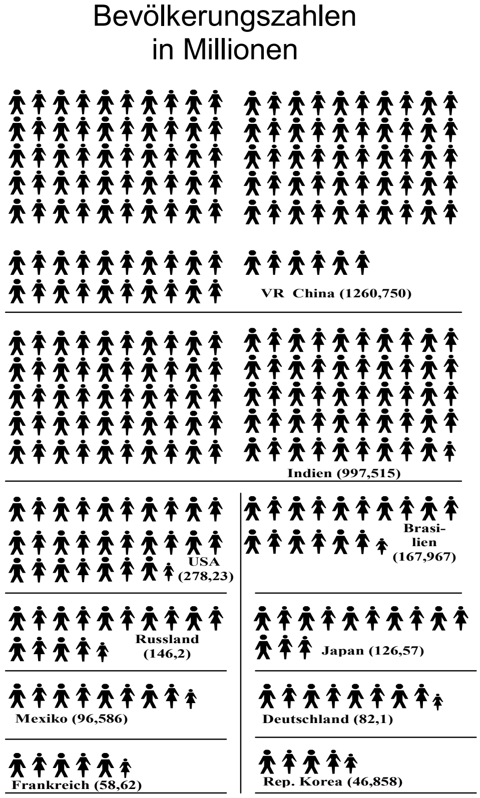
Lösungen:
Vorüberlegung: Mit dem Fahrrad oder zu Fuß kommen rund 25% der Verkehrsteilnehmer. Der Anteil derer, die das Fahrrad benutzen, ist größer als der Anteil der Fußgänger. Daraus kann geschätzt werden:

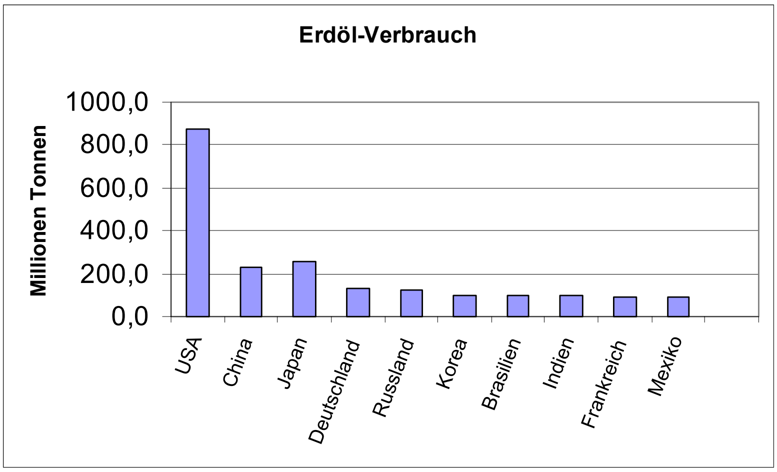
a) Ungefähr 15 % der Verkehrsteilnehmer benutzten das Fahrrad.

b) Ungefähr 10 % der Verkehrsteilnehmer gingen zu Fuß zur Arbeit.
Da die Autofahrer mit ca. 7 Mio. etwa die Hälfte aller Verkehrsteilnehmer ausmachten, gab es insgesamt ca. 14 Mio. Verkehrsteilnehmer, also ungefähr 1,4 Mio. Fußgänger.

Erdöl







Erdöl ist einer der wichtigsten Energieträger der Gegenwart. Die Förderung und der Verbrauch des kostbaren Rohstoffs sind global sehr ungleichmäßig verteilt.

a) Die USA verbrauchen viel mehr Erdöl als sie selbst fördern. Der Unterschied muss importiert werden. Wieviel ist das ungefähr?

b) Muss Russland auch Erdöl importieren? Begründe deine Antwort.

c) Vergleiche den pro Kopf-Verbrauch von China und Japan. Erkläre wie du vorgehst.

Lösungen:

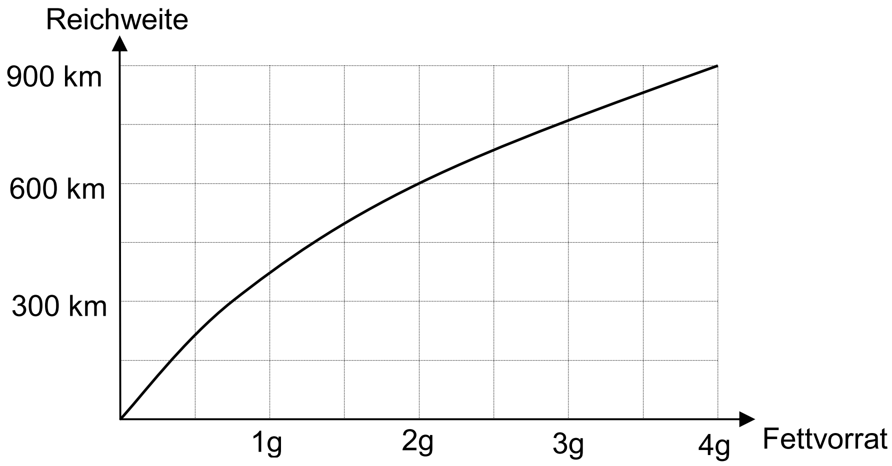
a) Verbrauch ca. 900 Mio. t, Förderung ca. 350 Mio. t. Die Differenz von ca. 550 Mio. t muss importiert werden.

b) Nein. Rußland fördert etwas mehr als 300 Mio. t und verbraucht nur knapp 150 Mio. t.

c) China und Japan haben etwa den gleichen Erdöl-Verbrauch, in China leben jedoch fast 10-mal so viele Menschen wie in Japan. Also verbraucht ein Japaner im Schnitt etwa 10-mal so viel Erdöl wie ein Chinese.

Zugvögel

Zugvögel verbrauchen beim Überqueren eines Meeres ihren Fettvorrat. Das folgende Diagramm zeigt die Reichweite eines solchen Vogels in Abhängigkeit vom angesetzten Fettvorrat.



a) Welche Reichweite hat ein Vogel, der mit 0,5 g Fettvorrat startet?

b) Ein Vogel startet mit einem Fettvorrat von 4 g. Nach welcher Strecke ist dieser Vorrat auf 3 g zusammengeschmolzen?

Lösungen:

a) ungefähr 200 km b) nach 150 km

3.2 Stochastische Aussagen interpretieren

Ein Hinweis vorab:

Die Auswahl der Aufgaben in der Studie "PISA 2000" beschränkte sich bewusst auf zwei der großen Bereiche des mathematischen Denkens, nämlich auf "Veränderung und Wachstum" und "Raum und Form"[1]. Es ist deshalb vernünftig und zu erwarten, dass bei künftigen Untersuchungen (z.B. bei "PISA 2003") anderen Leitideen (big ideas), insbesondere der Leitidee "Zufall", besondere Aufmerksamkeit geschenkt wird.

Beschreibung der Aufgaben

Es handelt sich um Sachtexte, in denen relative Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte (arithmetisches Mittel) eine Rolle spielen.

Da man nicht davon ausgehen kann, dass in allen 8. und 9. Klassen in ausreichendem Maß und mit der notwendigen Tiefe Statistik und Wahrscheinlichkeit behandelt wurde, werden im Folgenden vor allem solche Aufgaben angeboten, die

- mit dem "gesunden Menschenverstand" angegangen werden können
- auf ein intuitives (Vor-)Verständnis von "Wahrscheinlichkeit" als "Chance" (Laplace) und als "Anteil" (relative Häufigkeit bei Erhebungen mit großen Zahlen) zurückgreifen
- ohne stochastische Fachbegriffe und -verfahren gelöst werden können.

Vorausgesetzt werden lediglich Kenntnisse und Fertigkeiten aus der Bruchrechnung und der Prozentrechnung.

Bei der Beschreibung möglicher Lösungswege werden nicht nur die Ergebnisse angegeben; vielmehr wird versucht, auch mögliche Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern aufzuzeigen.

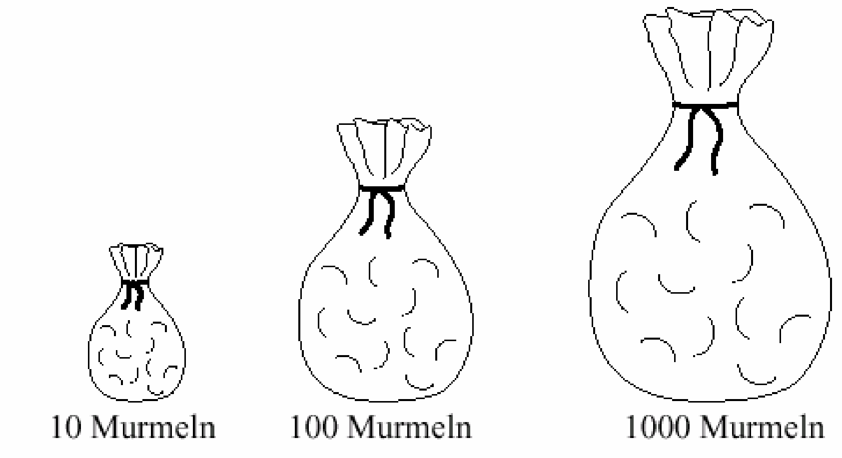
---

[1] vgl.: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000. – Opladen 2001, S. 140

PISA- und TIMSS-Aufgaben

Murmeln

In jedem dieser Beutel gibt es nur eine rote Murmel.



Du sollst ohne hinzusehen aus einem der Beutel eine Murmel herausnehmen. Bei welchem Beutel ist die Chance am größten, dass du die rote Murmel ziehst?

- ☐ Bei dem Beutel mit den 10 Murmeln.
- ☐ Bei dem Beutel mit den 100 Murmeln.
- ☐ Bei dem Beutel mit den 1000 Murmeln.
- ☐ Die Chance ist bei allen Beuteln gleich.

Würfelflächen

Jede der sechs Flächen eines Würfels ist entweder rot oder blau angemalt. Beim Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit 2:3 , dass Rot oben liegen bleibt.
Wie viele Flächen sind rot?

- ☐ Eine
- ☐ Zwei
- ☐ Drei
- ☐ Vier
- ☐ Fünf

Blutbank

Die Blutbank hat Informationen über ihre Spender gesammelt. Die Tabelle zeigt die Verteilung der Blutgruppen auf jeweils 100 Spender.

Von 100 Blutspendern sind ...	
38	0+
32	A+
9	B+
8	0–
7	A–
3	AB+
2	B–
1	AB–

Wenn es einen dringenden Bedarf an 50 Blutspenden der Gruppe 0– gibt, wie viele Spender (mit unbekannter Blutgruppe) aus der Gesamtbevölkerung müssten nach deiner Erwartung aufgerufen werden, um genügend Blut der Gruppe 0– zu bekommen?
Erkläre deine Rechnung!

Lösungen:

1. Lösungsweg (schrittweises Herantasten):
In 100 Spenden sind 8 der Gruppe 0– zu erwarten , in 200 also 16, ..., in 600 demnach 48 und in 650 entsprechend 52 Blutspenden der gesuchten Gruppe. Um 50 geeignete Blutspenden zu bekommen, sollten also mindestens 625 Blutspender aufgerufen werden.

2. Lösungsweg (Prozentrechnung):
8% aller Spender haben die erforderliche Blutgruppe, die Berechnung des Grundwertes zum Prozentwert 50 ergibt 625. Um 50 geeignete Blutspenden zu bekommen, sollten also mindestens 625 Blutspender aufgerufen werden.

3. Lösungsweg (proportionale Zuordnung):
8 mal Blutgruppe 0– bei 100 Spendern
2 mal Blutgruppe 0– bei 25 Spendern
50 mal Blutgruppe 0– bei 625 Spendern
Um 50 geeignete Blutspenden zu bekommen, sollten also mindestens 625 Blutspender aufgerufen werden.

Weitere Aufgaben

Wählerbefragung

Bei einer Umfrage gaben 6000 Personen an, welche Partei sie bei der letzten Wahl gewählt haben. In der Tabelle ist das Ergebnis dargestellt.

Partei	A	B	C	D	E
Anzahl der Wähler	2440	2060	1200	240	60

Wie viel Wähler der Partei C wird man wahrscheinlich in einer zufällig zusammengesetzten Gruppe von 300 Personen antreffen?

Lösungen:

1. Lösungsweg: 1200 von 6000 = $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$ von 300 = 60

2. Lösungsweg: 300 von 6000 = $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$ von 1200 = 60

Einkaufszone – ja oder nein

Ein Meinungsforschungsinstitut hat 300 Passanten nach ihrem Urteil über eine neue Einkaufszone befragt. In der Tabelle ist ein Ergebnis verloren gegangen.

volle Zustimmung	Zustimmung mit Vorbehalten	keine Meinung	eher Ablehnung	strikte Ablehnung
22%	26%	32%	15%	

Wie viele Passanten waren positiv eingestellt, wie viele lehnten die Einkaufszone strikt ab?

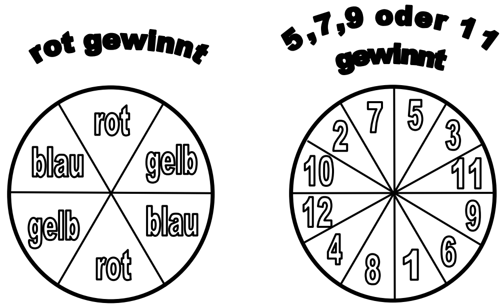
Lösungen:

1. Lösungsweg:
a) 22% von 300 = 66; 26% von 300 = 78; 66+78 = 144
b) 32% von 300 = 96; 15% von 300 = 45; 300-(66+78+96+45) = 15

2. Lösungsweg:
a) 22% + 26% = 48%; 48% von 300 = 144
b) 22%+26%+32%+15% = 95%; 5% lehnten also strikt ab; 5% von 300 = 15

Farbe oder Zahl?

An welchem der beiden Glücksräder ist die Gewinnchance größer? Begründe deine Antwort.



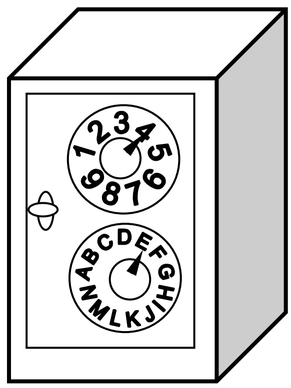
Lösungen:

1. Lösungsweg:
Farbenrad: Man gewinnt bei 2 von 6 Feldern Sektoren.
Zahlenrad: Man gewinnt bei 4 von 12 Feldern.
Also sind die Chancen gleich hoch.

2. Lösungsweg:
Beim Farbenrad sind 2 von 6 Feldern rot. Man kann sich vorstellen, dass beim Zahlenrad jedes Feld des Farbenrads "halbiert" wurde. Damit werden sowohl die Anzahl der Felder insgesamt, als auch die Anzahl der Gewinnfelder verdoppelt.
Also sind die Chancen gleich hoch.

Geheimcode vergessen

Die Einstellung der Zahnräder zum Öffnen des Tresors ist nicht bekannt. Wie lange dauert es, wenn alle möglichen Einstellungen durchprobiert werden müssen? Für eine Einstellung werden 2 Sekunden benötigt.



Lösung:
Bei jeder der 9 Einstellungen des Zahlenrads muss man 14 Einstellungen des Buchstabenrads probieren; insgesamt also 126 Einstellungen. Das ergibt 252 Sekunden = 4 Minuten und 12 Sekunden.

Kugeln raten

In einem Kasten befinden sich 5 rote Kugeln. Die übrigen Kugeln in dem Kasten sind blau. Die Wahrscheinlichkeit (Chance), eine blaue Kugel zu ziehen, ist $\frac{2}{3}$. Wie viele blaue Kugeln sind in dem Kasten?

Lösung:
$\frac{2}{3}$ der Kugeln im Kasten sind blau. → $\frac{1}{3}$ der Kugeln sind rot. → 5 Kugeln sind $\frac{1}{3}$ aller Kugeln → Also gibt es 15 Kugeln in dem Kasten → Davon sind 10 blau.

Tomaten im Winter

In einer Gärtnerei wurden vier verschiedene Sorten von Tomaten gesetzt. Während einer Kälteperiode ist eine gewisse Zahl von Setzlingen erfroren. Welche Sorte war am widerstandsfähigsten, welche am empfindlichsten? – Schreibe auf, wie du rechnest.

	Sorte A	Sorte B	Sorte C	Sorte D
Zahl der Setzlinge	60	80	20	240
davon erfroren	15	28	6	84

Lösungen:

1. Lösungsweg:
Man muss bei allen Sorten auf die gleiche Anzahl von Setzlingen hochrechnen, am besten auf 240.

	Sorte A	Sorte B	Sorte C	Sorte D
von 240 wären erfroren	60	84	72	84

Sorte A war am widerstandsfähigsten; die Sorten B und D waren gleichermaßen am empfindlichsten.

2. Lösungsweg:
Man bildet von jeder Sorte Gruppen von je 20 Setzlingen:
A: 3 Gruppen à 20, B: 4 Gruppen à 20, D: 12 Gruppen à 20.
In einer Gruppe à 20 Setzlingen sind erfroren bei A: 5, B: 7, C: 6, D: 7.
Sorte A war am widerstandsfähigsten; die Sorten B und D waren gleichermaßen am empfindlichsten.

3. Lösungsweg: $\frac{15}{60} = 25\%$; $\frac{28}{80} = 35\%$; $\frac{6}{20} = 30\%$; $\frac{84}{240} = 35\%$

Sorte A war am widerstandsfähigsten; die Sorten B und D waren gleichermaßen am empfindlichsten.

Fußball im Fernsehen

150 Personen wurden befragt, wie häufig sie Sendungen zur Fußballweltmeisterschaft am Fernsehen verfolgen. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle nur teilweise eingetragen. Vervollständige die Tabelle.

	Häufigkeit (absolut)	Anteil
Möglichst alle Sendungen	12	
Möglichst alle live-Übertragungen		
Ich wähle bestimmte Sendungen aus.		52%
Mich interessiert die WM nicht.	39	

Lösung:

1. Schritt: 12 von 150 = 8% ;
2. Schritt: 39 von 150 = 26% ;
3. Schritt: 52% von 150 = 78 Personen
4. Schritt: 100% – 86% = 14% → 21 Personen
   oder: 150 Pers. – 129 Pers. = 21 Personen → 14%

Urlaubskosten

Familie Bauer gab angeblich bei einem Kurzurlaub von 5 Tagen im Mittel täglich 108,60 Euro aus. Diese Angabe wird bezweifelt, da feststeht, dass an vier von fünf Tagen täglich weniger als 95 Euro ausgegeben wurde. Wird die Angabe zu Recht bezweifelt?

Lösung:

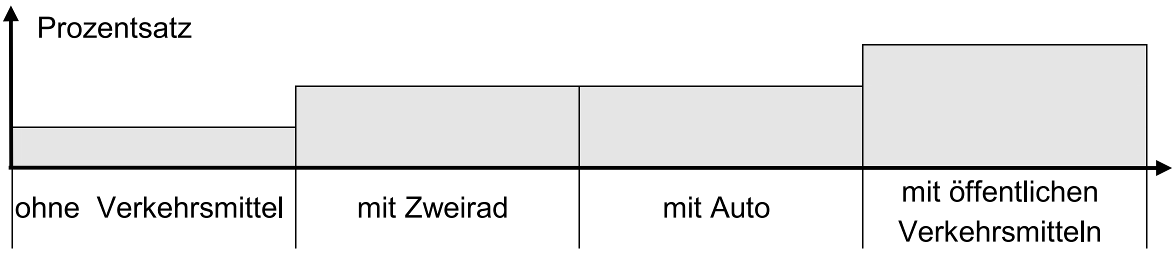
5 mal 108,60 Euro = 543,00 Euro. Es wurden also insgesamt 543 Euro in 5 Tagen ausgegeben. Für die Tage 1 bis 4 kann man beliebige Werte, die kleiner als 95 Euro sind, annehmen. Addiert man diese Werte, so ergeben sich die Ausgaben von vier Tagen. Am 5. Tag wurde dann der Rest, der an 543 Euro fehlt, ausgegeben.
Die Behauptung der Familie Bauer kann also richtig sein.

Beispiel:

Tag	1	2	3	4	5
Euro	90	90	90	90	183

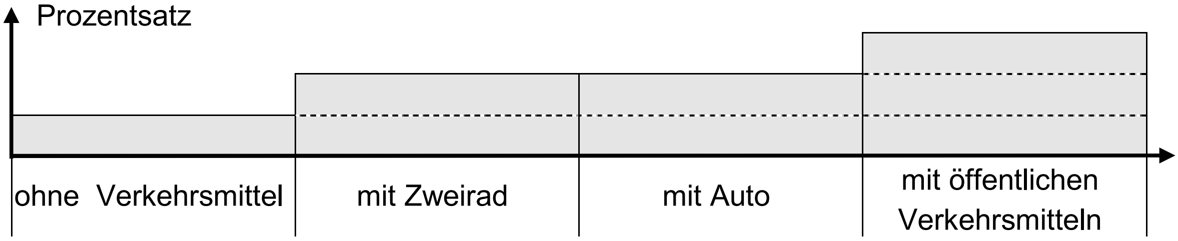
Werbemeldung der Verkehrsbetriebe

"Immer mehr Personen bevorzugen auf dem Weg zur Arbeitsstätte ein öffentliches Verkehrsmittel. Die neueste Umfrage (siehe Grafik) zeigt, dass bereits jeder Zweite Bahn oder Bus benutzt."
Wird die Behauptung der Verkehrsbetriebe durch die Grafik belegt?
(Hinweis: Die schraffierte Fläche stellt 100% der Befragten dar.)



Lösungen:

Das gesamte schraffierte Feld kann man in 8 gleiche Telfelder unterteilen.



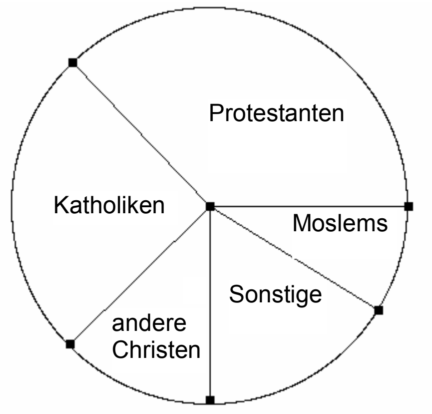
1. Lösungsweg:
Wenn jeder Zweite mit öffentlichen Verkehrsmitteln zur Arbeit fahren würde, müssten in dieser Sparte mindestens 4 Felder schraffiert sein; es sind aber nur 3 schraffiert.

2. Lösungsweg:
Ein schraffiertes Feld stellt 12,5% dar. Mit öffentlichen Verkehrsmitteln kommen 3 mal 12,5% = 37,5% der Befragten zur Arbeit und nicht 50%.

Mathhausen

Das nebenstehende Kreisdiagramm beschreibt die Religionszugehörigkeit der Einwohner in Mathhausen.

Wie groß ist (ungefähr) die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einwohner, dem du begegnest, ein Christ ist?



Lösung:
Die Felder (Sektoren) von Protestanten, Katholiken und anderen Christen entsprechen 270°; also trifft man mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% auf einen Christen.

Murmeln

Hans und Dagmar haben in ihren Hosentaschen gleich große Murmeln der Farben rot, grün und blau.

a) In der Hosentasche von Hans sind 4 rote, 5 grüne und 3 blaue Murmeln. Wie groß ist der Anteil roter / grüner / blauer Murmel?

b) In der Hosentasche von Dagmar sind insgesamt 20 Murmeln, von denen 3 Murmeln blau sind. Die Wahrscheinlichkeit (Chance), dass Dagmar eine rote Murmel zieht, ist 40%. Wie viele grüne Murmeln sind in der Hosentasche?

Lösung:

a) rote Murmeln: 4 von 12 entspricht $33\frac{1}{3}\,\%$

grüne Murmeln: 5 von 12 entspricht $41\frac{2}{3}\,\%$

blaue Murmeln: 3 von 12 entspricht 25 %

b) 40 % von 20 Murmeln sind rot. Also sind 8 Murmeln rot und 3 Murmeln blau. Von den 20 Murmeln sind somit 20 – 8 – 3 = 9 Murmeln grün.

Lateinklasse

Man befragt 82 Kinder einer 7. Jahrgangsstufe, ob sie sich für Latein oder Französisch als 2. Fremdsprache entscheiden. Von den 44 Mädchen wählen 12 Latein. Von den Jungen wählen 32 Französisch. Alle Jungen und Mädchen, die Latein gewählt haben, bilden die so genannte Lateinklasse.
Wie groß ist der Anteil der Jungen in der Lateinklasse?

Lösung:
1. Schritt: 82 (Kinder) – 44 (Mädchen) = 38 (Jungen)
2. Schritt: 38 (Jungen) – 32 (Jungen mit Französisch) = 6 (Jungen mit Latein)
3. Schritt: 12 (Mädchen) + 6 (Jungen) = 18 (Kinder mit Latein)

In der Lateinklasse befinden sich somit 18 Kinder, von denen 6 Jungen sind.
Ihr Anteil in der Lateinklasse beträgt $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Hinweis: Eine Vierfeldertafel vereinfacht die Übersicht bei den Schritten 1 bis 3:

	Mädchen	Junge	
Latein	**12**	6	18
Französisch	32	**32**	64
	44	38	**82**

Laufwettbewerb

Gerd und Felix trainieren für einen Laufwettbewerb. In den letzten 6 Tagen lief Gerd dabei Strecken mit folgenden Längen:

MO	DI	MI	DO	FR	SA
4,3 km	6,5 km	7,1 km	5,8 km	5,5 km	6,2 km

Felix ist die ersten 5 Tage mit Gerd gelaufen und hat nur am letzten Tag allein trainiert. Er kommt auf durchschnittlich 6,5 km pro Tag.

a) Wie viel km ist Gerd durchschnittlich pro Tag gelaufen?

b) Wie viele km ist Felix am letzten Tag gelaufen?

Lösung:

a) Gerd ist durchschnittlich
$$(4,3\text{ km} + 6,5\text{ km} + 7,1\text{ km} + 5,8\text{ km} + 5,5\text{ km} + 6,2\text{ km}) : 6 = \underline{5,9\text{ km}}$$
gelaufen.

b) Felix ist am letzten Tag x km gelaufen. Aus der Gleichung
$$(4,3\text{ km} + 6,5\text{ km} + 7,1\text{ km} + 5,8\text{ km} + 5,5\text{ km} + x\text{ km}) : 6 = 6,5\text{ km}$$
ergibt sich somit ein zurückgelegter Weg von $x = \underline{9,8\text{ km}}$ für den letzten Tag.

Kategorie 4: Aufgaben, die selbstständige Lösungswege abverlangen

Beschreibung der Aufgaben

Es handelt sich in der Regel um realitätsbezogene Problemstellungen, denen nicht unmittelbar ein erlernter Lösungsalgorithmus zugeordnet werden kann. Vielmehr müssen zur Lösung des Problems geeignete Strategien erst entwickelt werden. Das Vorgehen wird gern als Modellierungsprozess bezeichnet. Bei solchen Problemstellungen gibt es häufig mehrere ganz verschiedene Lösungswege.

Mögliche Ursachen für Defizite bei den Schülerinnen und Schülern

Durch das Trainieren von Routineaufgaben sind die Schülerinnen und Schüler daran gewöhnt, bei Textaufgaben unter den bekannten "Rezepten" dasjenige zu suchen, das zu der Problemstellung passt, das heißt, mit dem man für die Aufgabe das Ergebnis findet. Finden sie kein geeignetes "Rezept", geben sie ganz auf.

Mögliche unterrichtliche Maßnahmen

Schülerinnen und Schüler anhalten und anleiten,

- sich eigene Lösungswege auszudenken und nicht nur nach erlernten Lösungsschemata zu suchen
- Probieren und Messen einzubeziehen
- auch unfertige Ansätze als (Teil-)Erfolg zu werten
- eigene Lösungswege zu dokumentieren.

Es versteht sich von selbst, dass das Modellieren eines Sachproblems wesentlich mehr Zeit in Anspruch nehmen muss, als das Lösen einer einfachen Textaufgabe. Die unterrichtlichen Rahmenbedingungen müssen also entsprechend gestaltet werden.
Das Heranführen von Schülerinnen und Schülern an das Mathematisieren von Sachproblemen lässt sich nicht von heute auf morgen realisieren. Es ist Teil der mittelfristigen Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts.

PISA- und TIMSS-Aufgaben

Bleistifte

Eine Schülergruppe hat insgesamt 29 Bleistifte. Jeder hat mindestens einen Bleistift. Sechs Schüler haben je 1 Bleistift, 5 Schüler haben 3 und der Rest hat 2.
Wie viele Schüler haben nur zwei Bleistifte?

- ☐ 4
- ☐ 6
- ☐ 8
- ☐ 9

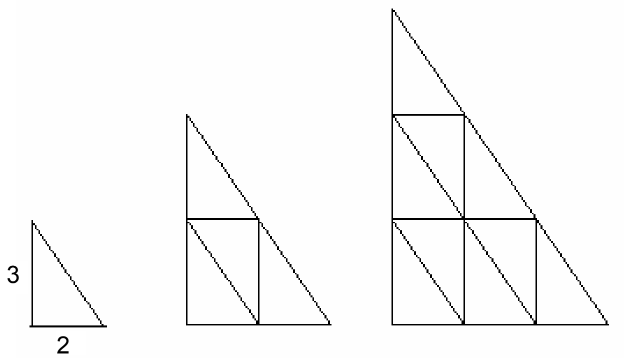
Lösungen:

1. Lösungsweg:
x sei die Zahl der Schüler mit 2 Bleistiften. Die Gesamtzahl der Bleistifte ist dann:
$6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + x \cdot 2 = 29$
Äquivalent umgeformt: $6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + x \cdot 2 = 29 \Leftrightarrow 21 + x \cdot 2 = 29$
$\Leftrightarrow x \cdot 2 = 8 \Leftrightarrow x = 4$.

2. Lösungsweg:
29 Bleistifte sind insgesamt vorhanden, 6 davon haben die Schüler mit einem Bleistift, 15 die mit 3 Bleistiften. Es bleiben 8 Bleistifte übrig. Da die restlichen Kinder je 2 Bleistifte haben, sind es 4 Kinder.

Dreiecke

Hier sieht man eine Folge von drei ähnlichen Dreiecken.
Alle kleinen Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich).



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Vervollständige die Tabelle, indem du herausfindest, wie viele kleine Dreiecke eine große Figur bilden.

Figur	Anzahl kleiner Dreiecke
1	1
2	
3	

b) Die Folge ähnlicher Dreiecke wird fortgesetzt bis zur 8-ten Figur.
Wie viele kleine Dreiecke würde man für Figur 8 benötigen?

Lösungen:

a)

Figur	Anzahl kleiner Dreiecke
1	1
2	4
3	9

b)

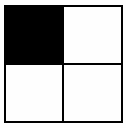
1. Lösungsweg:
Die Anzahlen scheinen Quadratzahlen zu sein. Dies wird bestätigt, wenn man Figur 4 zeichnet. Die achte Quadratzahl ist folglich 64.

2. Lösungsweg:
Mit jeder neuen Figur kommt eine ungerade Zahl von Dreiecken hinzu (bei Figur n kommen 2n-1 Dreiecke hinzu). Somit erhält man bei Fortsetzung der Tabelle bis zur achten Figur die Zahlen 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64.

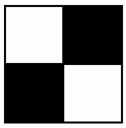
3. Lösungsweg:
Die Grundseite der achten Figur ist acht Mal so groß wie die der ersten, die Höhe ebenfalls. Also ist der Flächeninhalt der achten Figur das 64-fache des Flächeninhalts der ersten Figur.

Kärtchen

Zwei Schachteln enthalten in Quadrate unterteilte Kärtchen, um ein größeres Muster herzustellen. Jedes Kärtchen ist in 4 kleinere Quadrate unterteilt.
Alle Kärtchen in Schachtel 1 sehen so aus:



Alle Kärtchen aus Schachtel 2 sehen so aus:



Für das gewünschte Muster muss jedes Kärtchen aus Schachtel 2 mit zwei Kärtchen aus Schachtel 1 zusammengesetzt werden.

a) Für das gewünschte Muster werden 60 Kärtchen aus Schachtel 2 gebraucht.
   Wie viele Kärtchen benötigt man insgesamt?

   Antwort: ___________________________

b) Welcher Bruchteil der kleinen Quadrate wird im gewünschten Muster schwarz sein?

   Antwort: ___________________________

Lösungen:

a) Ein Kärtchen aus Schachtel 2 wird immer mit zwei Kärtchen aus Schachtel 1 zusammengesetzt.
   60 Kärtchen von Schachtel 2 werden also mit 120 Kärtchen von Schachtel 1 kombiniert. Man benötigt insgesamt 180 Kärtchen.

b) 1.Lösungsweg:
   2 Kärtchen aus Schachtel 1 enthalten 2 schwarze Quadrate.
   1 Kärtchen aus Schachtel 2 enthält 2 schwarze Quadrate
   Es sind also jeweils 4 schwarze Quadrate auf 12 kleine Quadrate.
   Der gesuchte Bruchteil ist folglich 4 von12 = $\frac{1}{3}$

   2.Lösungsweg:
   120 Kärtchen aus Schachtel 1 enthalten 120 schwarze Quadrate.
   60 Kärtchen aus Schachtel 2 enthalten $60 \cdot 2 = 120$ schwarze Quadrate
   Es sind also insgesamt 240 schwarze Quadrate.
   Die Gesamtzahl der kleinen Quadrate ist $180 \cdot 4 = 720$.
   Der gesuchte Bruchteil ist folglich 240 von 720, also 1 von 3 = $\frac{1}{3}$

Schlafende Robbe

Eine Robbe muss atmen, auch wenn sie schläft. Martin hat eine Robbe eine Stunde lang beobachtet. Zu Beginn seiner Beobachtung befand sich die Robbe an der Wasseroberfläche und holte Atem. Anschließend tauchte sie zum Meeresboden und begann zu schlafen. Innerhalb von 8 Minuten trieb sie langsam zurück an die Oberfläche und holte Atem. Drei Minuten später war sie wieder auf dem Meeresboden, und der ganze Prozess fing von vorne an.

Nach einer Stunde war die Robbe:

☐ auf dem Meeresboden
☐ auf dem Weg nach oben
☐ beim Atemholen
☐ auf dem Weg nach unten

Lösungen:

Man kann annehmen, dass der erste Atem- und Tauchgang 3 Minuten dauert. Der Weg zurück zur Oberfläche dauert 8 Minuten.

1. Lösungsweg:
Die Schülerinnen und Schüler schreiben alle Wege der Robbe auf, bis sie bei 60 Min. = 1 Std. angekommen sind:

$$0 \xrightarrow{+3} 3 \xrightarrow{+8} 11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{+8} 22 \ldots.\ 55 \xrightarrow{+3} 58 \xrightarrow{+8} 64$$

Ergebnis: Nach 60 Min. ist die Robbe gerade auf dem Weg nach oben.

2. Lösungsweg:
Für einen Zyklus aus Atmen, Tauchen und Auftauchen braucht die Robbe 11 Minuten. Nach 55 Minuten ist die Robbe demnach gerade oben, nach 58 Minuten unten und nach 60 Minuten auf dem Weg nach oben.

Weltbevölkerung

Die Fläche einer Insel beträgt 2000 km².
Frage:
Ist es möglich, dass die gesamte Bevölkerung der Erde, etwa 6 000 000 000 Menschen, zur gleichen Zeit auf dieser Insel steht?
Schreibe alle deine Rechnungen auf und erläutere deine Überlegungen.

Lösungen:

1. Lösungsweg:
Modellieren der benötigten Fläche eines Menschen durch ein Rechteck, z.B. mit der Länge l = 30 cm und der Breite b = 60 cm führt auf A = 1800 cm^2 und somit auf einen benötigten Platz von:
6 000 000 000 · 1800 cm^2 = 10 800 000 000 000 cm^2 = 1 080 000 000 m^2 = 1080 km^2.
Es ist möglich.

2. Lösungsweg:
Die Schüler gelangen zu einem Schätzwert für die von einem Menschen beanspruchte Fläche durch ein Experiment (10 Schüler zusammenstellen und Fläche ausmessen). Rest wie oben.

Weitere Lösungen:
Auf Grund des Modellierungscharakters der Aufgabe sind hier besonders viele Lösungsalternativen zu erwarten.

Weitere Aufgaben

Bier

Eine Getränkefirma hat im Juli 2002 das folgende Angebot erstellt:

- „Die Regenwald-Aktion läuft vom 01.05. bis 31.07.2002. In diesem Zeitraum wird mit jedem Kasten 1 m^2 Regenwald in Dzanga Sangha (Zentralafrikanische Republik) nachhaltig geschützt. Dies stellt der WWF Deutschland sicher."

Einige Zusatzinformationen, die dazu dienen können, die ökologische Bedeutung des Angebots abzuschätzen:

- Laut neuerer Studien werden täglich 24000 km^2 Regenwald abgeholzt.
- Jeder Deutsche trinkt im Mittel 130 Liter Bier jährlich.
- Deutschland hat ca. 82 Millionen Einwohner, von denen ca. 85% über 15 Jahre alt sind.
- Der meistverkaufte Kasten Bier hat 20 Flaschen.
- Eine Flasche Bier in einem solchen Kasten hat 0,5 l Inhalt.

Frage:
Welcher Bruchteil vom abgeholzten Wald würde im angegebenen Zeitraum täglich gerettet, wenn alle potenziellen Biertrinker diese Biermarke trinken würden?

Lösung:

Bier in einem Kasten: $20 \cdot 0{,}5\ l = 10\ l$.
Anzahl der Kästen pro Deutscher und pro Jahr: 130 l : 10 l = 13.
Potenzielle Biertrinker: 85% von 82 Millionen = 69,7 Millionen.
Kästen der Deutschen im Jahr: $13 \cdot 69{,}7$ Millionen = 906,1 Millionen.
Geschützte Fläche im Jahr: $906{,}1 \cdot 100\,000\ m^2 \approx 90{,}61\ km^2$.
Geschützte Fläche am Tag: $(906{,}1 \cdot 100\,000\ m^2)/365 \approx 0{,}248\ km^2$.
Das sind $0{,}248/24\,000 \approx 0{,}24/24\,000 \approx 1/100\,000$ des täglich abgeholzten Waldes.

Kommentar:

Die Aufgabe erfordert genaues Lesen und geschickte Verarbeitung der benötigten Daten. Lösungsalternativen bietet die Aufgabe kaum. Fachübergreifende Aspekte (Hintergründe über die Abholzung des Regenwaldes oder Alkoholkonsum) können eine unterrichtliche Behandlung fruchtbarer machen. Die Aktion war nicht unumstritten und wurde sogar beklagt.
Tatsächlich wurden durch die Aktion insgesamt 15 129 378 m² Regenwald geschützt.

Schnittpunkte

Wie viele Schnittpunkte haben 5 verschiedene Geraden höchstens?

Lösung:
5 Verschiedene Geraden haben höchstens 10 Schnittpunkte.

Kommentar:
Über systematisches Probieren können die Schülerinnen und Schüler eine Lösungsidee finden: Jede neu hinzugekommene Gerade kann jede der vorhandenen Geraden höchstens einmal schneiden. Weiterhin sollte bedacht werden, dass diese Möglichkeit auch tatsächlich realisiert werden kann.

Eier

Zur in eindreiviertel Stunden beginnenden 100-Jahr-Feier eines Vereins sollen im Vereinslokal mit dem abgebildeten Eierkocher noch möglichst viele 5-Minuten-Eier gekocht werden. Die ersten 5 Eier wurden gerade eben in den Kocher gegeben; bis zum Beginn der Feier soll ununterbrochen gekocht werden (wobei für das Herausnehmen, Abschrecken und Neubestücken jedes Mal 1 Minute einkalkuliert werden sollen).

a) Wie viele Eier werden noch fertig?

b) In welchem Stadium befindet sich der Prozess nach Ablauf der Zeit? Was kann mit den letzten Eiern geschehen?

Lösung:

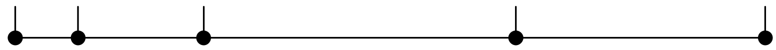
a) $1\frac{3}{4}$ Stunden sind 105 Minuten.
Ein Zyklus dauert 5 Minuten + 1 Minute = 6 Minuten.
Berechnung der Zyklen: 105 Minuten : 6 Minuten = 17 Rest 3 Minuten.
Es werden $17 \cdot 6$ Eier = 102 Eier rechtzeitig fertig.

b) Entweder hört man 3 Minuten vor dem Beginn der Feier auf oder man hat noch 6 3-Minuten-Eier, kocht diese fertig und hat 108 Eier.

Fünf Freunde

Fünf Freunde spielen in einer Band. Sie wohnen alle in verschiedenen Orten entlang einer geraden Straße.

Astadt	Btown	Cheim	Ddorf	Ecity
0	1	3	8	12



Die Abbildung verdeutlicht die Situation, zeigt die Namen der Orte und die Entfernungen der Städte in Kilometern von Astadt aus gerechnet.
Jeder der Freunde besitzt ein Mofa, mit dem er allerdings (außer sich selbst) nur sein Instrument transportieren kann.
Die Fahrtkosten (Benzin) werden aus der Band-Kasse bezahlt.
Zum Üben wollen sie sich bei einem von ihnen zu Hause treffen.

An welchem Ort müssen sie sich treffen, damit die Gesamtkosten für die Fahrten möglichst gering sind?

Lösung:
Es werden für die fünf Orte die Summen der Fahrstrecken in Kilometern berechnet:
Astadt: 1+3+8+12 = 24
Btown: 1+2+7+11 = 21
Cheim: 3+2+5+9 = 19
Ddorf: 8+7+5+4 = 24
Ecity: 4+9+11+12= 36
Da diese Summe für Cheim am kleinsten ist, sollten sie sich dort treffen.

Kommentar:
Die Aufgabe kann sehr gut variiert oder verallgemeinert werden (Variation der Abstände oder Anzahl der Schüler bis hin zur allgemeinen Lösung). Hintergründe zur Aufgabe, Literatur und eine interessante grafische Lösungsidee findet man in Mathematik lehren, 1985, Heft 8.

Schreckliche Drachen


Die Drachen sind inzwischen ausgestorben, das ist bei der Kraft und dem Mut der Ritter in den Märchen ja auch kein Wunder. Dass diese Ritter auch intelligent waren, zeigt sich darin, dass auch die besonders üble Unterart der Regeneratoren ausgestorben ist.

Diese Drachen können mehrere Köpfe und Schwänze besitzen.

Die Ritter bekämpfen die Drachen, indem sie entweder auf Köpfe oder auf Schwänze schlagen. Dabei können geschickte Ritter mit einem einzigen Streich einen oder zwei Köpfe oder aber einen oder zwei Schwänze abschlagen.

Damit wäre der Kampf der Ritter recht aussichtsreich, wenn die Drachen nicht auch noch die folgenden, ihren Namen erklärende magische Eigenschaften hätten:

- Sie sterben nur, wenn sie weder Kopf noch Schwanz haben.
- Wenn es einem Ritter gelingt, einen Kopf abzuschlagen, wächst sofort ein neuer nach.
- Schlägt er einen Schwanz ab, wachsen sofort zwei neue.
- Schafft er es, mit einem Schlag zwei Schwänze abzutrennen, so wächst dafür ein neuer Kopf.
- Nur wenn es ihm gelingt, zwei Köpfe mit einem Schlag vom Rumpf zu trennen, passiert nichts.

Wie tötet ein geschickter und schlauer Ritter einen Regenerator mit 2 Köpfen und 3 Schwänzen?

Lösung:

k stehe für einen vorhandenen Kopf, s für einen vorhandenen Schwanz.

Große Buchstaben mit vorangestelltem –Zeichen geben den Schlag des Ritters an.
Er hat also folgende Schlagmöglichkeiten: -S, -SS, -K, -KK.

Damit ergibt sich folgende Lösung:

Schlag Nummer	Zustand vor dem Schlag	Schlagart	Zustand nach dem Schlag
1	Kksss	-S	kkssss
2	Kkssss	-SS	kkkss
3	Kkkss	-SS	kkkk
4	Kkkk	-KK	kk
5	Kk	-KK	tot

Kommentar:
Die Schülerinnen und Schüler müssen den Text genau lesen und, probieren und kombinieren.
Anlegen einer Tabelle und vor allem die Betrachtung von Fallunterscheidungen sind nützliche Lösungsstrategien. Zwar bietet die Aufgabe kaum Lösungsvariabilität, wohl aber Alternativen in der Darstellung der Ergebnisse.

Taxi fahren

Taxitarife		
Grundbetrag	**2,00 □**	
Kilometer-preis	**6-22 Uhr**	**1,40 □**
	22 – 6 Uhr sowie sonn- und feiertags	**1,30 □**
Wartezeit	**Stunde 18,40 □**	

Die Abbildung zeigt in leicht vereinfachter Form die Taxitarife in Mathhausen.
Der Grundbetrag ist eine Gebühr, die unabhängig von der Fahrstrecke immer gezahlt werden muss.

a) Wie viel musste für eine 16 km lange Fahrt an einem Dienstag gezahlt werden, die von 8 Uhr bis 9 Uhr dauerte und in der das Taxi 15 Minuten lang im Stau stand?

b) Eine Fahrt ohne Wartezeit kostete 25 €. Was kann man über die Länge der Fahrstrecke aussagen?

Lösung:

a) $16 \cdot 1{,}40\text{ €} + 2\text{ €} + \frac{1}{4} \cdot 18{,}40\text{ €} = 22{,}40\text{ €} + 2\text{ €} + 4{,}60\text{ €} = 29\text{ €}$.

b) x = gefahrene Strecke in km.
Wenn der Fahrpreis 1,30 € wäre, ergäbe sich die Gleichung:
$2\text{ €} + x \cdot 1{,}30\text{ €} = 25\text{ €}$
Formt man dies äquivalent um, erhält man:
$2\text{ €} + x \cdot 1{,}30\text{ €} = 25\text{ €} \Leftrightarrow x \cdot 1{,}30\text{ €} = 23\text{ €} \Leftrightarrow x = 23\text{ €} : 1{,}30\text{ €} \Leftrightarrow x \approx 17{,}6923$.
Wäre der Fahrpreis dagegen 1,40 €, erhielte man analog
$2\text{ €} + x \cdot 1{,}40\text{ €} = 25\text{ €} \Leftrightarrow x \cdot 1{,}40\text{ €} = 23\text{ €} \Leftrightarrow x = 23\text{ €} : 1{,}40\text{ €} \Leftrightarrow x \approx 16{,}4286$.
Variiert der Fahrpreis, liegt die Fahrstrecke zwischen den berechneten Werten.
Die Fahrstrecke ist also höchstens 17,692 km und mindestens 16,429 km.

Aufgabe b kann auch mit Ungleichungen gelöst werden.