Fachhochschule Koblenz
Fachbereich Ingenieurwesen
Fachrichtung Maschinenbau

WS 06/07

Name: ______________________________

Matr.-Nr.: __________________________

Prüfung: Mathematik III

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
Summe	

Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

- Bearbeitungszeit : 120 min
- Erlaubte Hilfsmittel :
  - keine Einschränkung aller schriftlichen Unterlagen
  - Taschenrechner

Note : ________________________________

Thema: Differentialgleichungen

Aufgabe 1 (9P)

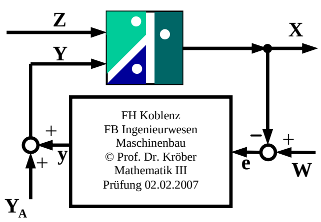
Lösen Sie die folgende Differentialgleichung durch Trennung der Veränderlichen!

Geg.: $x \cdot (x-1) \cdot y' = \dfrac{1}{\cos(y)}$ Ziel: $y = \ldots \dfrac{x-1}{x} \ldots$

Aufgabe 2 (17P)

Bestimmen Sie die gesamte Lösung (homogene und partikuläre Lösung) der folgenden Differentialgleichung! Zur Bestimmung der Lösung sind geeignete Ansätze zu verwenden.

Geg.: $y'' - y' - 2 \cdot y = -10 \cdot \cos(x)$



Aufgabe 3 (18P)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung: $y' + y = x \cdot e^{x}$

a. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung mit dem Produktansatz von Bernoulli. Hilfestellung: Ansatz: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

b. Lösen Sie ferner das Anfangswertproblem für die Anfangsbedingung $y(0) = -\dfrac{1}{4}$!

Aufgabe 4 (13P)

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung: $y' + y = 2 \cdot e^{-x}$

a. Bestimmen Sie die homogene Lösung der Differentialgleichung durch Trennung der Veränderlichen!
b. Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der Differentialgleichung durch Variation der Konstanten!
c. Überprüfen Sie durch eine Probe die Richtigkeit Ihrer ermittelten Lösung!
d. Lösen Sie das Anfangsproblem für $y(0) = 2$!

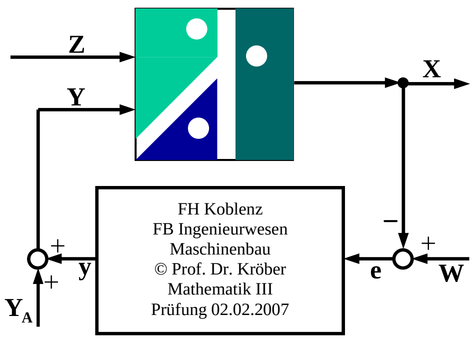
Aufgabe 5 (13P)

Lösen Sie die folgende Bernoulli’sche Differentialgleichung indem Sie die angegebene nichtlinerare Differentialgleichung durch eine Substitution auf eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung zurückführen.

Geg.: $x \cdot y' = y \cdot (1 + x^2 \cdot y)$ Endergebnis soll lauten: $y = ... = ?$

Hilfestellung: $y' = A(x) \cdot y + B(x) \cdot y^{\alpha}$ $z' = (1-\alpha) \cdot A(x) \cdot z + (1-\alpha) \cdot B(x)$ mit $z = y^{1-\alpha}$

Thema: Komplexe Zahlen



Aufgabe 6 (4P)

Stellen Sie die folgenden Zahlen in Exponentialform dar!

a.) $z = 4 - 3 \cdot i$ b.) $z = -\sqrt{12} - 2 \cdot i$

Aufgabe 7 (6P)

Bestimmen Sie alle Wurzeln von $\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{2} \cdot (-1+i)}$. Geben Sie die Ergebnisse in algebraischer <u>oder</u> trigonometrischer Form an!

Aufgabe 8 (6P)

Bestimmen/Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

a.) $(1+i)^8$ b.) $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot (\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2})$ c.) $\dfrac{10 \cdot (1-i)^2}{4 - 2 \cdot i}$

Aufgabe 9 (4P)

Welche Gleichung 5. Grades hat folgende Lösungen?

$z_1 = 1 + i$ $z_2 = 0$ $z_3 = i$ $z_4 = 1 - i$ $z_5 = -i$

Aufgabe 10 (5P)

Welche Punkte in der Gauß’schen Zahlenebene erfüllen die Gleichung $\dfrac{2 \cdot |z-4|}{|z-1|} \le 1$?

Bem.: Lösungsmethode freigestellt

Aufgabe 11 (5P)

Bestimmen Sie die beiden Lösungen (z_1 und z_2) der folgenden quadratischen Gleichung!

$z^2 - 2 \cdot (i+1) \cdot z + 4 \cdot i = 0$ Hilfestellung: $z_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Lösungen Prüfung Mathematik III 02.02.07 / Blatt 1

zu 1) $x(x-1)y' = \frac{1}{\cos y}$

$\cos y \cdot dy = \frac{dx}{x(x-1)}$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B\cdot x}{x(x-1)} = \frac{x(A+B)-A}{x(x-1)}$$

Koeff.-vergleich: $A = -1$; $B = -A = +1$

$$\cos y \cdot dy = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx$$

Integration:

$$\sin y = \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

$$\underline{\underline{y = \arcsin\left(\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C\right)}}$$

zu 2) $y'' - y' - 2y = 0$ (homogene Dgl.)

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$; $y' = \lambda e^{\lambda x}$; $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

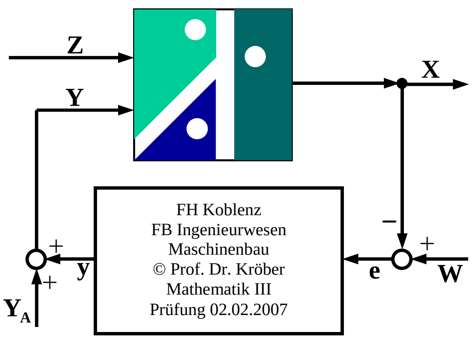
eingesetzt: $\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 2\cdot e^{\lambda x} = 0$

$$e^{\lambda x}\underbrace{(\lambda^2 - \lambda - 2)}_{=0} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_1 = +2\ ;\ \lambda_2 = -1$$

also: $\underline{\underline{y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}}}$



Ansatz für partikuläre Lösung:

$y_p = A\cdot\sin x + B\cdot\cos x$

$y_p' = A\cos x - B\sin x$

$y_p'' = -A\sin x - B\cos x$

eingesetzt:

$$-A\sin x - B\cos x - (A\cos x - B\sin x) - 2(A\sin x + B\cos x) = -10\cos x$$

Lösungen Prüfung Mathematik III 02.02.07 | Blatt 2

$$\sin x\,(\underbrace{-A+B-2A}_{=0}) + \cos x\,(\underbrace{-B-A-2B+10}_{=0}) = 0$$

$$B = 3A \quad (1) \qquad\qquad A + 3B = 10 \quad (2)$$

(1) in (2):

$$A + 3\cdot 3A = 10 \Rightarrow \underline{\underline{A = 1}}$$

$$\underline{\underline{B}} = 3\cdot A = 3\cdot 1 = \underline{\underline{3}}$$

also: $y_p = 1\cdot \sin x + 3\cdot \cos x$

zusammen:

$$\underline{\underline{y}} = y_H + y_p = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \sin x + 3\cdot\cos x}}$$

zu 3) $y = u\cdot v \quad ; \; y' = u\cdot v' + u'\cdot v$

eingesetzt:

$$u\cdot v' + u'\cdot v + u\cdot v = x\cdot e^x$$

$$u\,\underbrace{(v'+v)}_{=0} + \underbrace{u'\cdot v = x\cdot e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\frac{dv}{v} = -dx$$

Integration:

$$\ln|v| = -x + C_1$$

$$\underline{\underline{v}} = e^{-x}\cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C_2} = \underline{\underline{C_2 e^{-x}}} \quad \text{(homogene Lsg)}$$

eingesetzt in $u'\cdot v = x\cdot e^x$:

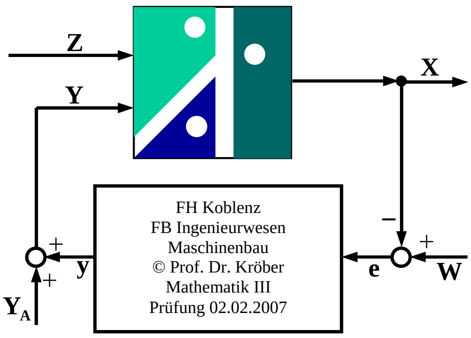
$$u'\cdot C_2 e^{-x} = x e^x$$

$$u' = \frac{1}{C_2} x e^{2x}$$

Partielle Integration:

$$u = \frac{1}{C_2}\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx + C_3\right]$$

$$= \frac{1}{C_2}\left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_3\right]$$



Lösungen Prüfung Mathematik III 02.02.07 / Blatt 3

eingesetzt: $y = u \cdot v = \frac{1}{\cancel{C_2}}\left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_3\right]\cdot \cancel{C_2} e^{-x}$

$$y = \frac{x}{2}e^{x} - \frac{1}{4}e^{x} + C_3 e^{-x}$$

b) $-\frac{1}{4} = \underbrace{\frac{0}{2}\underbrace{e^{0}}_{1}}_{0} - \frac{1}{4}\underbrace{e^{0}}_{1} + C_3 \underbrace{e^{-0}}_{1} \Rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$

also: $y = \frac{x}{2}e^{x} - \frac{1}{4}e^{x} = \frac{2x-1}{4}e^{x}$

zu 4, a) homogene Dgl:

$y' + y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \Rightarrow \ln|y| = -x + C_1 \Rightarrow y = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C_2}$

$$y = C_2 e^{-x}$$

b) $y = k(x)e^{-x}$

$y' = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$

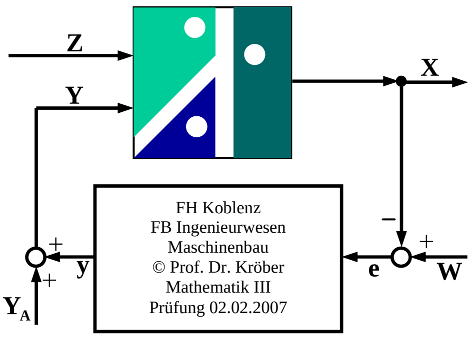
eingesetzt:

$k'(x)\cancel{e^{-x}} - \cancel{k(x)e^{-x}} + \cancel{k(x)e^{-x}} = 2\cancel{e^{-x}}$

$k'(x) = 2$

Integration: $k(x) = 2x + C_3$

eingesetzt: $y = (2x + C_3)e^{-x}$



c) Probe: $y' = 2e^{-x} + (2x + C_3)e^{-x}(-1)$

eingesetzt:
$2e^{-x} - (2x + C_3)e^{-x} + (2x + C_3)e^{-x} \stackrel{?}{=} 2e^{-x}$

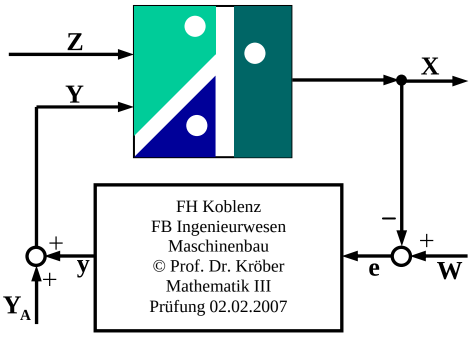
$\Rightarrow$ okay

Lösungen Prüfung Mathematik III 02.02.07 / Blatt 4

d) $2 = (2\cdot 0 + C_3)\underbrace{e^{-0}}_{1} \Rightarrow C_3 = 2$ also: $\underline{\underline{y = 2(x+1)e^{-x}}}$

zu 5) $x\cdot y' = y + x^2 y^2$

$$y' = \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{A(x)} y + \underbrace{x}_{B(x)}\cdot y^2 \qquad \alpha = 2 \Rightarrow z = y^{1-2} = \frac{1}{y} \quad \text{bzw. } y = \frac{1}{z}$$



$$z' = (1-2)\frac{1}{x}z + (1-2)\cdot x$$

$$z' = -\frac{z}{x} - x$$

$$\underline{\underline{z' + \frac{z}{x} = -x}}$$

homogene Dgl.:

$$z' + \frac{z}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

Integration: $\ln|z| = -\ln|x| + C_1$

$$\underline{\underline{z = \frac{C_2}{x}}} \qquad \text{Bem.: } C_2 = e^{C_1}$$

Variation der Konstanten:

$$z = \frac{k(x)}{x} \quad ; \quad z' = \frac{x\cdot k'(x) - 1\cdot k(x)}{x^2}$$

eingesetzt: $\dfrac{x\cdot k'(x) \cancel{- k(x)}}{x^2} + \dfrac{\cancel{k(x)}}{\cancel{x}\cdot x} = -x$

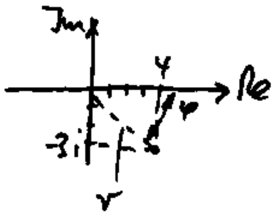
$$k'(x) = -x^2$$

$$k(x) = -\frac{1}{3}x^3 + C_3$$

also: $z = \dfrac{C_3 - \frac{1}{3}x^3}{x}\cdot\dfrac{3}{3} = \dfrac{3C_3 - x^3}{3x} \overset{!}{=} \dfrac{1}{y}$

$$\underline{y} = \frac{3x}{\underbrace{3C_3}_{C} - x^3} = \underline{\underline{\frac{3x}{C - x^3}}}$$

zu 6,a) $z = 4 - 3i$ $\qquad r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

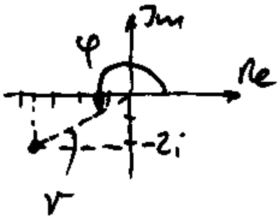


$$\tan\varphi = \frac{Im}{Re} = \frac{-3}{4} \Rightarrow \varphi = -36{,}87°$$

$$\hat{\varphi} = -0{,}6435$$

also: $\underline{\underline{z = 5 \cdot e^{-i \cdot 0{,}6435}}}$

b) $z = -\underbrace{\sqrt{12}}_{\approx 3{,}4} - 2i$ $\qquad r = \sqrt{(-\sqrt{12})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$

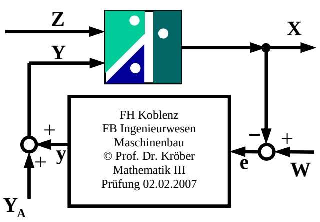


$$\tan\varphi = \frac{Im}{Re} = \frac{-2}{-\sqrt{12}} \Rightarrow \varphi = 30° \ (= \text{Hauptwert})$$

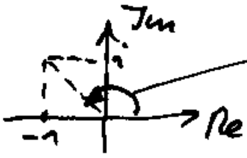
$$\Rightarrow \varphi = 30° + 180° = 210° \quad ; \ \hat{\varphi} = \frac{7}{6}\pi$$

also: $\underline{\underline{z = 4 e^{i \cdot \frac{7}{6}\pi}}}$

zu 7) $4 \cdot \sqrt{2}(-1+i) \xrightarrow{\text{Betrag}} 4 \cdot \sqrt{2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$



Winkel:



$\varphi = 135°$ bzw $\varphi = \frac{3}{4}\pi$

also: $4 \cdot \sqrt{2}(-1+i) = 8 \cdot e^{i \frac{3}{4}\pi}$

$$\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{2}(-1+i)} = \left(8 \cdot e^{i \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \underbrace{\sqrt[3]{8}}_{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$k = 0$:

$$\underline{\underline{z_0}} = 2 e^{i \frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} + i \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)}} = \underline{\underline{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}} = \sqrt{2}(1+i)$$

$k = 1$:

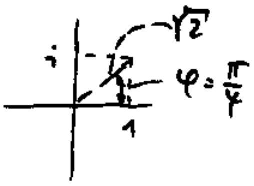
$$\underline{\underline{z_1}} = 2 e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2 e^{i \frac{3+8}{12}\pi} = 2 e^{i \frac{11}{12}\pi} = \underline{\underline{2\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i \sin\frac{11}{12}\pi\right)}}$$

$k = 2$: $+\frac{8}{12}\pi \Rightarrow \underline{\underline{z_2 = 2\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i \sin\frac{19}{12}\pi\right)}}$

Bem.: $z_0 = 2\left(\cos\frac{3}{12}\pi + i \sin\frac{3}{12}\pi\right)$

Lösungen Mathematik III 02.02.07 / Blatt 6

zu 8) a)



$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = \underbrace{\sqrt{2}^8}_{2^4} \cdot \underbrace{e^{i\cdot 2\pi}}_{1} = 16$$

b) $$2\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = 2 - \underbrace{i^2}_{-1}\cdot 2 = 4$$

c) $$\frac{10(1-i)^2}{4-2i}\cdot\frac{4+2i}{4+2i} = \frac{10(\cancel{1}-2i+\cancel{i^2})(4+2i)}{4^2 - 4\underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{-20i(4+2i)}{20} = -4i - 2\underbrace{i^2}_{-1} = 2-4i$$

zu 9) $(z-z_1)(z-z_4)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_5)$

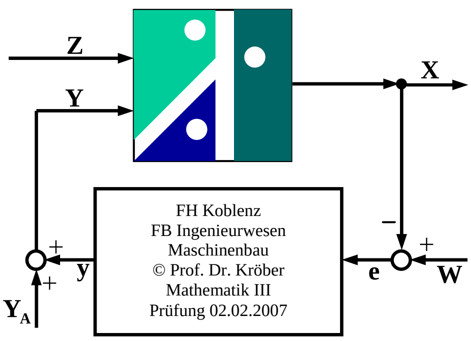
$= [z-(1+i)][z-(1-i)](z-0)(z-i)(z-(-i))$

$= [z-1-i][z-1+i]\cdot z\,(z-i)(z+i)$

$= [(z-1)^2 - \underbrace{i^2}_{-1}]\cdot z\,(z^2 - \underbrace{i^2}_{-1})$

$= [z^2-2z+1+1]\cdot z\,(z^2+1) = (z^2-2z+2)(z^2+1)\cdot z$

$= (z^4+z^2-2z^3-2z+2z^2+2)\cdot z = z^5-2z^4+3z^3-2z^2+2z$



zu 10) $2|z-4| \le |z-1|$

$2|x+iy-4| \le |x+iy-1|$

$2|x-4+iy| \le |x-1+iy|$

$2\sqrt{(x-4)^2+y^2} \le \sqrt{(x-1)^2+y^2}$ | Quad.

$4(x^2-8x+16+y^2) \le x^2-2x+1+y^2$

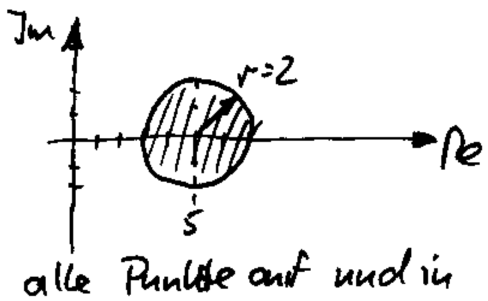
$3x^2-30x+3y^2+63 \le 0$

$x^2-10x+y^2+21 \le 0$

$x^2-10x+25-25+y^2+21 \le 0$

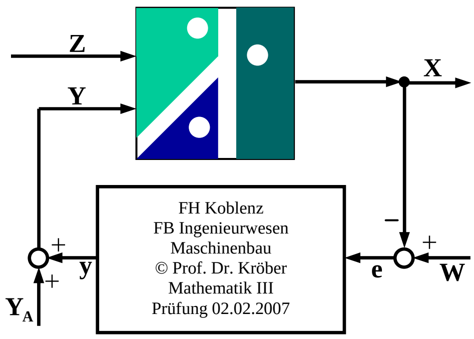
$(x-5)^2 + y^2 \le +4$

$(x-5)^2+y^2 \le 2^2$



alle Punkte auf und in dem Kreis

Lösungen Mathematik III 02.02.07 / Blatt 7



Alternativlösung zu 10)

nach Quadrieren:

$$4(z-4)(\overline{z-4}) \le (z-1)(\overline{z-1})$$

$$4(z-4)(\bar z-4) \le (z-1)(\bar z-1)$$

$$4(z\bar z-4z-4\bar z+16) \le z\bar z-z-\bar z+1$$

$$3z\bar z-15z-15\bar z+63 \le 0$$

$$z\bar z-5z-5\bar z+21 \le 0$$

$$\underbrace{z\bar z-5z-5\bar z+25}-25+21 \le 0$$

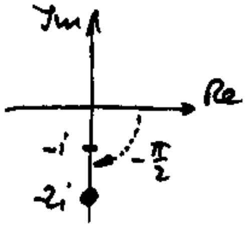
$$(z-5)(\bar z-5) \le 4 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\underline{\underline{|z-5| \le 2}} \quad \ldots$$

zu 11) $z^2+pz+q=0$; $p=-2(1+i)$; $q=4i$

$$z_{1,2} = -\frac{-\cancel{2}(1+i)}{\cancel{2}} \pm \sqrt{(1+i)^2-4i} = 1+i \pm \sqrt{1^2+2i+\underbrace{i^2}_{-1}-4i}$$

$$= 1+i \pm \sqrt{-2i}$$



$$-2i = 2\cdot e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

$$(-2i)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i(-\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}-i\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\Big) = 1-i$$

Bem.: Die andere bzw. die beiden Lösungen sind durch $\pm$ „gesichert"

also: $z_{1,2}=(1+i)\pm(1-i)$

$$\underline{\underline{z_1}} = 1+i+1-i = \underline{\underline{2}}$$

$$\underline{\underline{z_2}} = 1+i-1+i = \underline{\underline{2i}}$$