Fachhochschule Koblenz Blatt 1 von 3
Fachbereich Ingenieurwesen
Fachrichtung Maschinenbau

Name ______________________________

Matr.-Nr. _________________________

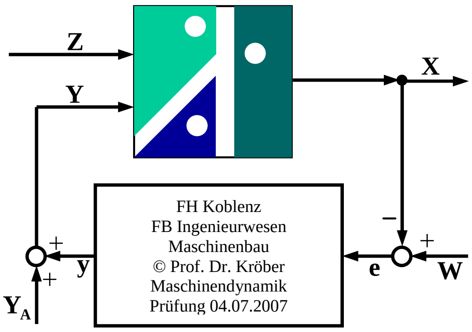
Maschinendynamik SS 07
Prof. Dr. W. Kröber

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Summe	

Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

- Bearbeitungszeit : 90 min
- Erlaubte Hilfsmittel :
  - Schreib- und Zeichengerät
  - Taschenrechner
  - Formelsammlung (11 Blätter)
  - aus der Technischen Mechanik:
    - Flächen- und Widerstandsmomente für die Biegung
    - Durchbiegungen und Neigungswinkel
    - Massenträgheitsmomente homogener Körper

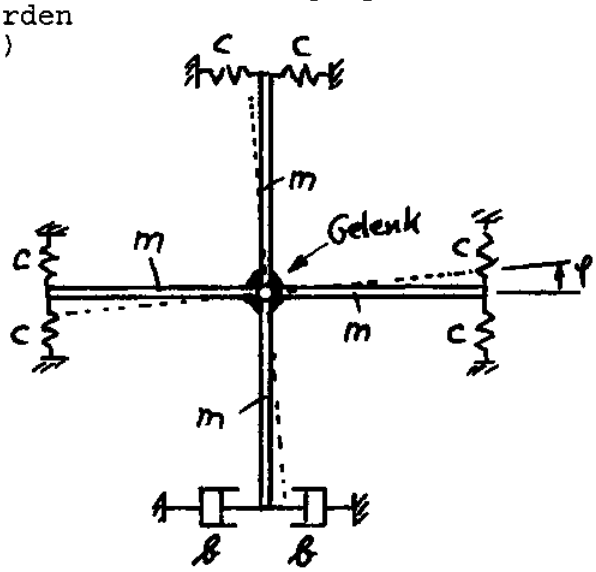
Note : ______________________________



Aufgabe 1 (16P)

Bei dem abgebildeten System sind 4 dünne Stäbe (jeweils Masse m) starr miteinander verbunden. Die Stäbe selbst sind auch als starr anzusehen. Die Länge der Stäbe sei l. Das System kann Drehschwingungen um das Gelenk ausführen. Zur Zentrierung werden 6 Federn (jeweils Federsteifigkeit c) eingesetzt. Zur Dämpfung dienen zwei Schwingungsdämpfer (jeweils Dämpfungsbeiwert b).

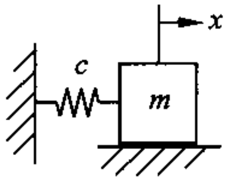
Annahme: kleine Auslenkungen



a. Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 in Abhängigkeit der angegebenen Größen!

b. Wie groß muss der Dämpfungsbeiwert b gewählt werden, wenn der Dämpfungsgrad $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ erzielt werden soll?

Aufgabe 2 (10P)



Bei einer mechanischen Schwingung findet ein ständiger Wechsel von potentieller und kinetischer Energie statt. In einem bestimmten Augenblick sei $E_{pot} = E_{kin} = 2\,Nm$. Reibungseinflüsse werden vernachlässigt.

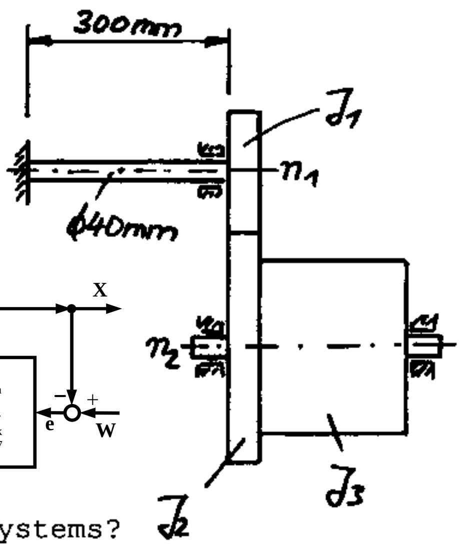
Weitere Daten des Schwingungssystems: $m = 0{,}5\,kg$; $\omega_0 = 4000\,s^{-1}$

a. Wie groß ist der Maximalwert der Geschwindigkeit?

b. Wie groß ist die maximale Auslenkung?

c. Wie oft wird die kinetische Energie in der Sekunde gleich Null?

Aufgabe 3 (14P)



Das Ersatzsystem eines Getriebes besteht aus einer torsionsweichen Welle und einem starren Zahnradpaar (Massenträgheitsmomente J_1 und J_2) sowie einer zusätzlichen Schwungmasse (Massenträgheitsmoment J_3).

Geg.: $J_1 = 0{,}05\,kgm^2$; $J_2 = 0{,}8\,kgm^2$; $J_3 = 1{,}2\,kgm^2$

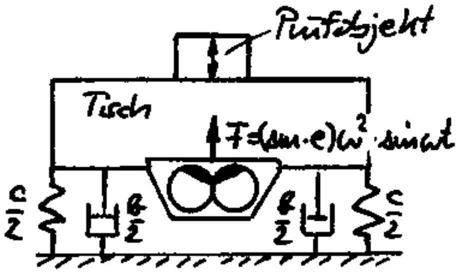
Daten Welle: $G = 80000\,N/mm^2$

Zahnradpaar: $i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2}$

Hilfestellung: $I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$

Wie groß ist die (Torsions-)Eigenfrequenz des Systems?

Aufgabe 4 (22P)



Ein Schwingtisch wird durch einen gerichteten Schwinger in Schwingung versetzt. Er dient dazu, die Funktionalität von Prüfobjekten unter Schwingbeanspruchung zu untersuchen. Im Auslegungspunkt soll die Phasenverschiebung zwischen dem Schwingweg und der Erregerkraft gerade -170^0 betragen. Dabei wird die Maschine überkritisch betrieben bei $\eta = 2$.

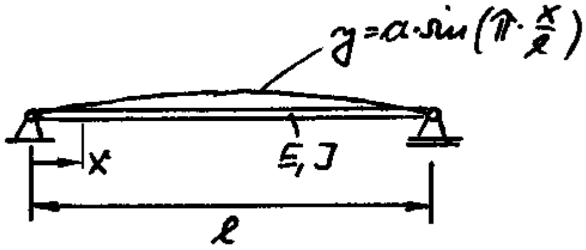
a. Wie groß muss dann der Dämpfungsgrad ϑ sein?

b. Die Gesamtmasse von Prüftisch und Prüfobjekt sei m=20kg. Die gewünschte Schwingamplitude sei $\hat{x} = 1\,mm$. Wie groß muss dann die zu installierende Unwucht sein?
Hilfestellung: $U = \Delta m \cdot e$

c. Die Anlage läuft im Auslegungspunkt mit n=2900 1/min. Wie groß ist dann die auf die Umgebung übertragende Kraft $\hat{F}_u$?

Aufgabe 5 (16P)

Für einen beidseitig gelenkig gelagerten Träger kann man nachweisen, dass sich bei Biegeschwingungen für die Schwingform der tiefsten Eigenfrequenz eine Sinusfunktion ergibt.
Daten des Trägers:
Flächenmoment I, Querschnitt A, Dichte ρ (alle Größen konstant)



Weisen Sie mit dem Rayleigh-Verfahren nach, dass diese Eigenfrequenz nach folgender Gleichung berechnet werden kann:

$$\omega_0 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}}$$

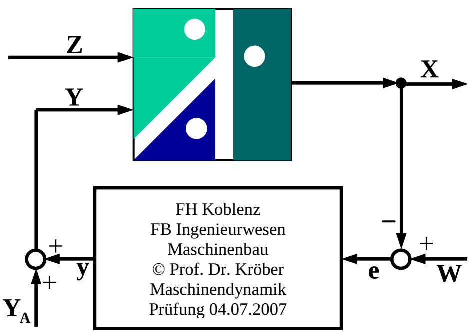
Hinweise zur Lösung:

$$\omega_0{}^2 = E \cdot \frac{\int_0^l I(x) \cdot \hat{y}''^2(x) \cdot dx}{\int_0^l A(x) \cdot \rho(x) \cdot \hat{y}^2(x) \cdot dx} \qquad \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx = \frac{l}{2}$$

Aufgabe 6 (22P)

Bei einem Zweimassenschwinger wirkt auf der Obermasse eine sinusförmige Kraft. Die Amplitude der Obermasse in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\hat{x}_2 = \hat{F} \cdot \frac{2c - m\omega^2}{m^2\omega^4 - 3cm\omega^2 + c^2}$$

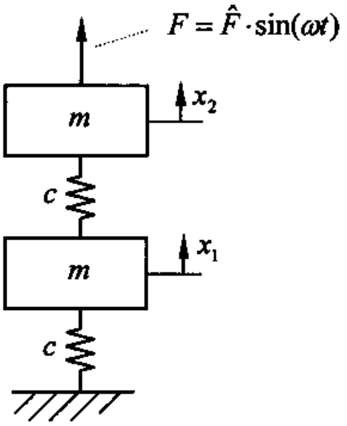


a. Bestimmen Sie die beiden Eigenfrequenzen!

b. Wie groß ist die Tilgerfrequenz?

c. Weisen Sie die obige Gleichung nach!

Zweimassenschwinger:

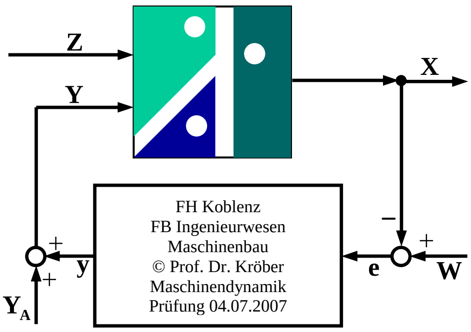


$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1) + F$$

$$m\ddot{x}_1 = -cx_1 - c(x_1 - x_2)$$

Hinweis: In Zeigerschreibweise übergehen, z.B. $m(j\omega)^2\underline{x}_2 = -c(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) + \underline{F}$

Lösungen Prüfung Maschinendynamik 04.07.07 | Blatt 1



m1,a) $\omega_0^2 = \frac{c_D}{J} = \frac{6(c\cdot \ell^2)}{4(\frac{1}{3}m\ell^2)} = \frac{9}{2}\cdot\frac{c}{m}$

$$\underline{\underline{\omega_0}} = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{c}{m}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{c}{m}} \approx 2{,}121\cdot\sqrt{\frac{c}{m}}}}$$

m1,b) $J\ddot{\varphi} + b_D\dot{\varphi} + c_D\varphi = 0$

$$4\left(\frac{1}{3}m\cancel{\ell^2}\right)\ddot{\varphi} + 2\cdot b\cancel{\ell^2}\dot{\varphi} + 6c\cancel{\ell^2}\varphi = 0 \quad \Big| \cdot \frac{3}{4m}$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{2b\cdot 3}{4m}}_{2\delta}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{6c\cdot 3}{4m}}_{\omega_0^2}\varphi = 0$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\frac{3b}{4m}}{\sqrt{\frac{9c}{2m}}} = \frac{b\sqrt{2}\cdot\sqrt{m}}{4\cdot m\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{2}\,b}{4\sqrt{c\cdot m}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{b = 2\sqrt{c\cdot m}}}$$

m2,a) $E_{pot} = 2Nm + 2Nm = 4Nm$

$$E_{pot} = \frac{m}{2}v^2 \Rightarrow \underline{\underline{v}} = \sqrt{\frac{2\cdot E_{pot}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4}{0{,}5}}\,\frac{m}{s} = \underline{\underline{4\,\frac{m}{s}}}$$

m2,b) $v = \omega\cdot r \Rightarrow r = \frac{v}{\omega} = \frac{4}{4000}\,m = \underline{\underline{1mm = \hat{x}}}$

ω_0

m3,c) $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{4000}{2\cdot\pi}\,1/s = 636{,}6\ Hz$

zwei Totpunkte je Periode $\rightarrow 2\cdot 636{,}6 \approx \underline{\underline{1273}}$ mal je $\underline{\underline{\text{Sekunde}}}$

m4) $\varphi = \frac{M\cdot\ell}{G\cdot J_p} \Rightarrow c_D = \frac{M}{\varphi} = \frac{G\cdot J_p}{\ell} = \frac{80000\cdot\frac{\pi}{32}\cdot 40^4}{300}\,\frac{Nmm}{1} = 67020{,}6\,\frac{Nm}{rad}$

$E_{kin} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}(J_2+J_3)\omega_2^2$; $i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \omega_2 = i\cdot\omega_1$

$$= \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}(J_2+J_2)\cdot i^2\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(J_1 + (J_2+J_3)\cdot i^2\right)}_{J_{red}}\omega_1^2$$

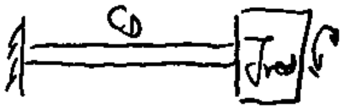
$$J_{red} = \left[0{,}05 + (0{,}8+1{,}2)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right]kgm^2 = 0{,}55\,kgm^2$$

Lösungen Prüfung Maschinendynamik 04.07.07 / Blatt 2

auch zu 3)

$$\underline{\underline{f_0}} = \frac{1}{2\cdot\pi}\sqrt{\frac{c_D}{J_{red}}} = \frac{1}{2\cdot\pi}\sqrt{\frac{67020{,}6}{0{,}55}}\,Hz = \underline{\underline{55{,}56\,Hz}}$$

Bem.:

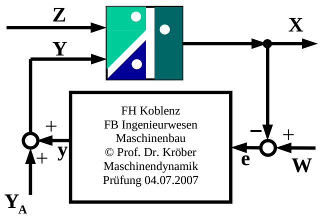


zu 4,a)

$$\tan\varphi = -\frac{2\vartheta\eta}{1-\eta^2} \Rightarrow \underline{\underline{\vartheta}} = \frac{(\eta^2-1)\tan\varphi}{2\cdot\eta} = \frac{(2^2-1)\tan(-170^\circ)}{2\cdot 2} = \underline{\underline{0{,}1322}}$$

zu 4,b)

$$V_3 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\vartheta\eta)^2}} = \frac{2^2}{\sqrt{(1-2^2)^2+(2\cdot 0{,}1322\cdot 2)^2}} = 1{,}313$$



$$V_3 = \frac{\hat{x}}{\frac{\Delta m\cdot e}{m}} \Rightarrow \Delta m\cdot e = \frac{\hat{x}\cdot m}{V_3}$$

$$\underline{\underline{U = \Delta m\cdot e}} = \frac{10^{-3}\cdot 20}{1{,}313}\,kg\,m = \underline{\underline{0{,}01523\,kg\,m}}$$

zu 4,c)

$$V_2 = \frac{\sqrt{1+(2\vartheta\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\vartheta\eta)^2}} = \frac{\sqrt{1+(2\cdot 0{,}1322\cdot 2)^2}}{\sqrt{(1-2^2)^2+(2\cdot 0{,}1322\cdot 2)^2}} = 0{,}3714$$

$$V_2 = \frac{\hat{F}_u}{\hat{F}} \Rightarrow \hat{F}_u = V_2\cdot\hat{F} = V_2\cdot\Delta m\cdot e\,\omega^2\ ;\ \omega = \frac{\pi\cdot n}{30}$$

$$= 0{,}3714\cdot 0{,}01523\left(\frac{\pi\cdot 2900}{30}\right)^2 N = \underline{\underline{521{,}6\,N}}$$

zu 5)

$$\omega_0^2 = \frac{E\cdot J\int_0^l \hat{y}''^2\,dx}{A\cdot\rho\int_0^l \hat{y}^2\,dx}\quad ; J, A, \rho = \text{konst}$$

$$\int_0^l \hat{y}^2\,dx = \int_0^l \left[a\cdot\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right]^2 dx = a^2\underbrace{\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx}_{l/2} = \frac{1}{2}a^2 l$$

$$y = a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$y'' = -a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$\int_0^l \hat{y}''^2\,dx = \int_0^l\left[-a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right]^2 dx = a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\underbrace{\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx}_{l/2} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\cdot l$$

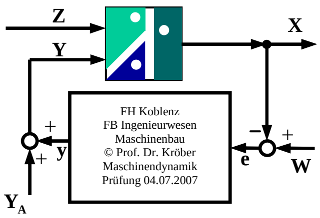
Lösungen Prüfung Maschinendynamik 04.07.07 | Blatt 3

auch zu 5)

$$\omega_0^2 = \frac{E\cdot J\, \cancel{\tfrac{1}{2}a^2}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cancel{\ell}}{A\cdot\rho\, \cancel{\tfrac{1}{2}a^2}\cdot \cancel{\ell}}$$

$$\omega_0 = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\sqrt{\frac{EJ}{A\cdot\rho}}$$

Bem.: Hier heben sich die Integrale im Zähler und Nenner (bei geeigneter Umformung) auf.



zu 6, a) Nenner = 0

$$0 = m^2\omega^4 - 3cm\omega^2 + c^2 \quad \Big| \frac{1}{m^2}$$

$$0 = \omega^4 - 3\frac{c}{m}\omega^2 + \left(\frac{c}{m}\right)^2$$

$$\omega_{0_{1,2}}^2 = \frac{3}{2}\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{c^2}{m^2}} = \left(\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\frac{c}{m} \quad ; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\omega_0$$

$$f_{01} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}_{\approx 0{,}2575}\cdot\sqrt{\frac{c}{m}} \quad ; \quad f_{02} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}_{\approx 0{,}0984}\cdot\sqrt{\frac{c}{m}}$$

Alternativlösung aus Formelsammlung mit

$$\omega_{0_{1,2}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1+c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1+c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}$$

zu 6, b) Zähler = 0

$$2c - m\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2c}{m} \; ; \; f_{Tilger} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2c}{m}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2\pi}}_{0{,}2251}\sqrt{\frac{c}{m}}$$

zu 6, c) $m(j\omega)^2\underline{x}_1 = -c\underline{x}_1 - c(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$

$$[2c + m(j\omega)^2]\underline{x}_1 - c\underline{x}_2 = 0$$

$$m(j\omega)^2\underline{x}_2 = -c(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) + \underline{F}$$

$$[c + m(j\omega)^2]\underline{x}_2 - c\underline{x}_1 = \underline{F}$$

in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 2c + m(j\omega)^2 & -c \\ -c & c + m(j\omega)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{F} \end{pmatrix}$$

$$\det(\ldots) = [2c + m(j\omega)^2][c + m(j\omega)^2] - c^2$$

Auflösen nach Unbekannte $\underline{x}_2$:

$$\underline{x}_2 = \frac{1}{\det(\ldots)}\begin{vmatrix} 2c + m(j\omega)^2 & 0 \\ -c & \underline{F} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2c + m(j\omega)^2}{\det(\ldots)}\cdot\underline{F}$$

mit $j^2 = -1$ und Betragsbildung:

$$\hat{x}_2 = \frac{2c - m\omega^2}{[2c - m\omega^2][c - m\omega^2] - c^2}\cdot\hat{F}$$

$\vdots$

$$\frac{\hat{x}_2}{\hat{F}} = \frac{2c - m\omega^2}{m^2\omega^4 - 3cm\omega^2 + c^2}$$