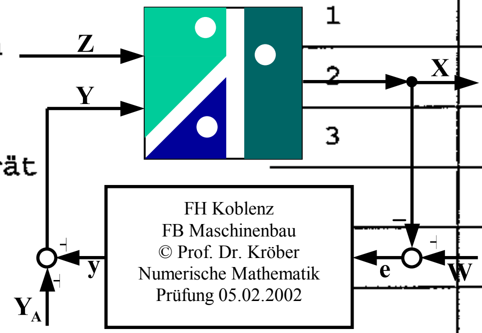
Fachhochschule Koblenz Blatt 1 von 2
Fachbereich Maschinenbau
Numerische Mathematik WS 01/02
Prof. Dr. W. Kröber

Name ______________________

Matr.-Nr. ______________________

Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

- Bearbeitungszeit : 90 min
- Erlaubte Hilfsmittel :
  - Schreib- und Zeichengerät
  - Taschenrechner
  - Literatur, Kopien
  - Vorlesungsmitschrift



Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
7	
Summe	

x Lösungen

Note : ______________________

Aufgabe 1 (20 P)

Die folgende Funktion ist näher zu untersuchen.

$$y = x \cdot e^{-x}$$

a. Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an und schätzen Sie die Fläche unter der Kurve im Intervall $0 \le x \le 6$!

$$A = \int_0^6 x \cdot e^{-x}\, dx = ?$$

b. Bestimmen Sie die Fläche mit der Simpson'schen Regel (Stützstellenabstand sei h=1)!

c. Bestimmen Sie den exakten Wert der Fläche!

Hilfestellung: $\int x \cdot e^{-x}\, dx = -e^{-x} \cdot (1+x) + C$

d. Zur Erzielung einer höheren Genauigkeit müsste der Stützstellenabstand verringert werden. Welcher Bereich der Kurve erfordert dies im besonderen Maße?

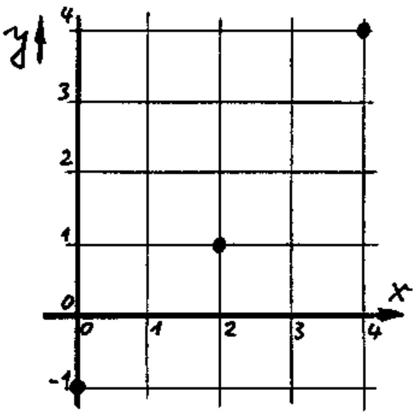
Aufgabe 2 (16 P)

Die Funktion aus Aufgabe 1 ($y=xe^{-x}$) soll im Bereich [0,6] tabelliert werden. Der Abstand von Stützstelle zu Stützstelle beträgt hier h=0,1. Bestimmen Sie eine obere Schranke für den zu erwartenden Fehler, wenn zwischen den Stützstellen linear interpoliert wird!

Aufgabe 3 (6 P)

Für die Funktion $y = f(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x}$ ist die erste und zweite Ableitung an der Stelle x=1 zu bestimmen (Rechnung mit "numerischer Mathematik"). Hierbei sei Δx=0,05.
Bemerkung: Auf "Bogenmaß" achten !

Aufgabe 4 (14 P)



Für die 3 skizzierten Wertepaare soll mit der Interpolationsformel von Lagrange der Funktionswert an der Stelle x=3 bestimmt werden (Parabelansatz).
Zusatzfrage:
Wie ändert sich der Funktionswert an der Stelle x=3, wenn sich der Stützstellenwert $y_1=1$ um $\pm 0{,}1$ verändert?

Aufgabe 5 (14 P)

Die folgende Gleichung besitzt eine Lösung.

$$2\sqrt{x} = 2 - \frac{1}{2}x$$

a. Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie einen Schätzwert für die Lösung!

b. Prüfen Sie die beiden möglichen Schrittfunktionen hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften!

c. Führen Sie 4 Iterationsschritte durch mit dem Startwert $x^{(0)}=1$!

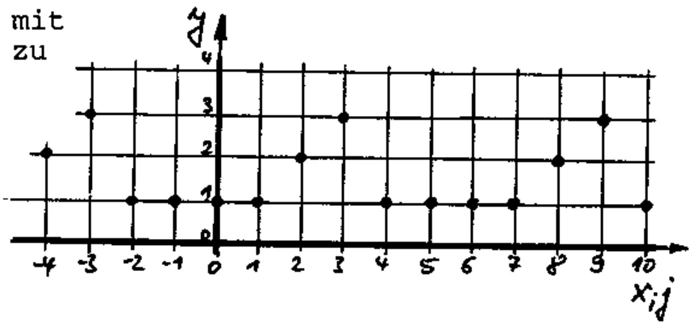
Aufgabe 6 (16 P)

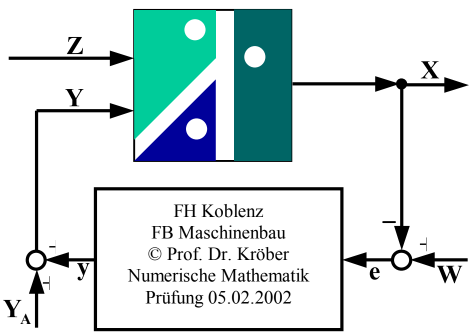
Für eine größere Anzahl von Wertepaaren $[x_i, y_i]$ sollen für den Ansatz y = a + b * ln(x+c) die Ansatzfreiwerte a, b und c bestimmt werden. Über den Ansatz "Minimum Fehlerquadrate" erhält man 3 Gleichungen mit den 3 Unbekannten a, b und c. Bestimmen Sie diese 3 Gleichungen! Können Sie (in Worten) eine Lösungsstrategie zur Lösung dieses Gleichungssystems angeben?

Aufgabe 7 (14 P)

Für die gegebenen Wertepaare sind mit der Fourieranalyse folgende Werte zu bestimmen:

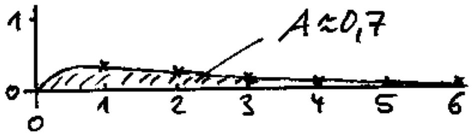
$$\frac{a_0}{2}\ ,\ a_1\ ,\ b_1\ ,\ A_1\ ,\ \varphi_{0_1}$$





Prüfung Numerische Mathematik vom 5.2.02 / Blatt 1

zu 1,a)



b) $Q = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$

$= \frac{1}{3}(0 + 4\cdot 0{,}3679 + 2\cdot 0{,}2707 + 4\cdot 0{,}1494 + 2\cdot 0{,}0733 + 4\cdot 0{,}0337 + 0{,}0149)$

$\underline{\underline{= 0{,}9690}}$

c) $\underline{\underline{A}} = \int_0^6 x e^{-x} dx = \left[-e^{-x}(1+x)\right]_0^6 = -e^{-6}(1+6) + e^{-0}(1+0) = \underline{\underline{0{,}9826}}$

d) im Bereich 0,1(,2); weil dort Krümmung groß

zu 2) $R(x) = \frac{1}{2!} f''(\xi)\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]$; $\xi \in [x_0, x_1]$

$f(x) = x e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

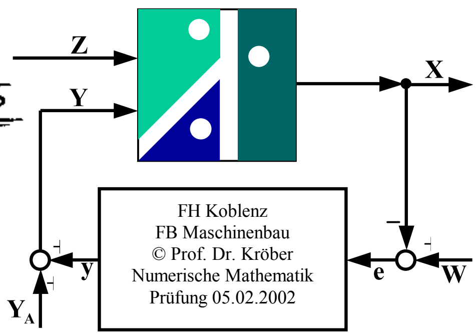
$f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} + x(-1)e^{-x}) = -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

x	0	1	2	3	$\to\infty$
f''	-2	-0,3679	0	0,0498	$\to 0$

$\Rightarrow \max|f''| = 2$

also:

$\underline{\underline{|R(x)|}} \le \frac{1}{2!}\cdot 2 \quad \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{h^2}{4} = \frac{0{,}1^2}{4} = \underline{\underline{0{,}0025}}$



zu 3) $x_0 = 0{,}95$; $f(x_0) = y_0 = 0{,}792819$

$x_1 = 1{,}0$; $f(x_1) = y_1 = 0{,}841471$

$x_2 = 1{,}05$; $f(x_2) = y_2 = 0{,}888844$

$\underline{\underline{y'}} = \frac{y_2 - y_0}{2\cdot\Delta x} = \frac{0{,}888844 - 0{,}792819}{2\cdot 0{,}05} = \underline{\underline{0{,}9603}}$

$\underline{\underline{y''}} = \frac{y_2 + y_0 - 2y_1}{\Delta x^2} = \frac{0{,}888844 + 0{,}792819 - 2\cdot 0{,}841471}{0{,}05^2} = \underline{\underline{-0{,}5116}}$

zu 4) $y = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$= y_0 \frac{3-2}{0-2}\cdot\frac{3-4}{0-4} + y_1 \frac{3-0}{2-0}\cdot\frac{3-4}{2-4} + y_2 \frac{3-0}{4-0}\cdot\frac{3-2}{4-2}$

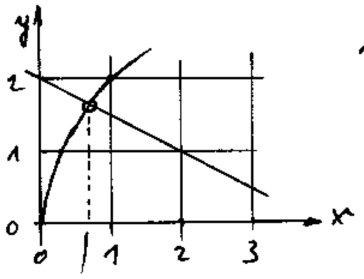
Prüfung Numerische Mathematik vom 5.2.02 / Blatt 2

FH Koblenz
FB Maschinenbau
© Prof. Dr. Kröber
Numerische Mathematik
Prüfung 05.02.2002

auch zu 4.) $\underline{\underline{y}} = -\frac{1}{8} y_0 + \frac{3}{4} y_1 + \frac{3}{8} y_2 = -\frac{1}{8}(-1) + \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{19}{8} \approx \underline{\underline{2{,}375}}$

$y_1 \to \pm 0{,}1 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta y}} = \frac{3}{4}(\pm 0{,}1) = \underline{\underline{\pm 0{,}075}} \quad \left(y \begin{smallmatrix} \to 2{,}450 \\ \to 2{,}300 \end{smallmatrix} \right)$

zu 5) a)



$\xi \approx 0{,}7$

b) $2\sqrt{x} = 2 - \frac{1}{2}x$

$\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{4}x$ | $\frac{1}{2}x = 2 - 2\sqrt{x}$

$x = \left(1 - \frac{1}{4}x\right)^2 = \varphi_1(x)$ | $x = 4\left(1 - \sqrt{x}\right) = \varphi_2(x)$

$\varphi_1'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{4}x\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$ | $\varphi_2'(x) = 4(-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x\right)$ | $= -\frac{2}{\sqrt{x}}$

$\varphi_1'(0{,}7) = -0{,}4125$ | $\varphi_2'(0{,}7) = -2{,}39$

→ alternierend $\underline{\text{Konv.}}$ | → alternierend $\underline{\text{divergent}}$

c) $x^{(0)} = 1$; $x^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{4}1\right)^2 = 0{,}5625$; $x^{(2)} = \left(1 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}5625\right)^2 = 0{,}7385$

$x^{(3)} = \ldots = 0{,}6648$; $\underline{x^{(4)} = \ldots = 0{,}6952}$

zu 6) $\phi = \sum \varphi_i^2 = \sum \left(y_i - a - b \cdot \ln(x_i + c)\right)^2$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = 2 \cdot \sum(\ldots)(-1) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{\underline{\sum y_i - n a - b \sum \ln(x_i + c) = 0}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = 2 \cdot \sum(\ldots)(-1) \ln(x_i + c) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{\underline{\sum y_i \ln(x_i + c) - a \sum \ln(x_i + c) - b \sum \ln^2(x_i + c) = 0}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = 2 \cdot \sum(\ldots)(-1) \cdot b \frac{1}{x_i + c} = -2b \underbrace{\sum(\ldots)\frac{1}{x_i + c}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sum \frac{y_i}{x_i + c} - a \sum \frac{1}{x_i + c} - b \sum \frac{\ln(x_i + c)}{x_i + c} = 0}}$$

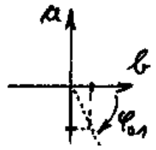
zu 7) $n = 6$

$\underline{\underline{\frac{a_0}{2}}} = \frac{1}{6}(1 + 1 + 2 + 3 + 1 + 1) = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1{,}5}}$

$\underline{\underline{a_1}} = \frac{2}{6}\left[1 \cdot \cos 0° + 1 \cdot \cos 60° + 2 \cdot \cos 120° + 3 \cos 180° + 1 \cdot \cos 240° + 1 \cdot \cos 300°\right] = \underline{\underline{-\frac{5}{6} \approx -0{,}8\overline{3} \ldots}}$

$\underline{\underline{b_1}} = \frac{2}{6}\left[1 \cdot \sin 0° + 1 \cdot \sin 60° + 2 \cdot \sin 120° + 3 \cdot \sin 180° + 1 \cdot \sin 240° + 1 \cdot \sin 300°\right] = \underline{\underline{\frac{1}{6}\sqrt{3} \approx 0{,}2887}}$

$\underline{\underline{A_1}} = \sqrt{(-0{,}8333)^2 + (0{,}2887)^2} = \underline{\underline{0{,}8819}}$



$\tan \varphi_{01} = \frac{-0{,}8333}{0{,}2887} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_{01} = -70{,}9°}}$