Fachhochschule Koblenz Blatt 1 von 2
Fachbereich Maschinenbau
Numerische Mathematik WS 03/04
Prof. Dr. W. Kröber

Name ____________________

Matr.-Nr. ________________

Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

- Bearbeitungszeit : 90 min

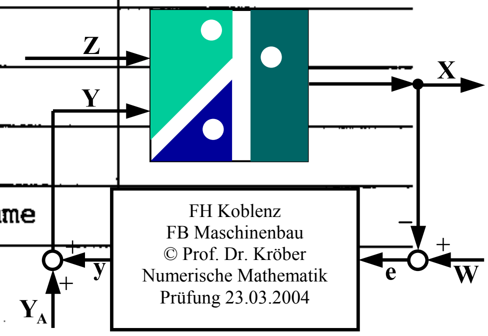
- Erlaubte Hilfsmittel :

  - Schreib- und Zeichengerät
  - Taschenrechner
  - Literatur, Kopien
  - Vorlesungsmitschrift

Note : ____________________

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Summe	

+ Lösungen



Aufgabe 1 (12 P)

Die Funktion $y = f(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x}$ soll im Bereich $0 \le x \le \pi$ integriert werden.

a. Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an und schätzen Sie die Fläche unter der Kurve in dem betreffenden Intervall!
   Bem.: auf Bogenmaß achten!

b. Bestimmen Sie die Fläche mit der Simpson'schen Regel (Stützstellenabstand sei $h=\pi/6$)!

c. Zur Erzielung einer höheren Genauigkeit müsste der Stützstellenabstand verringert werden. Welcher Bereich der Kurve erfordert dies im besonderen Maße?

Aufgabe 2 (16 P)

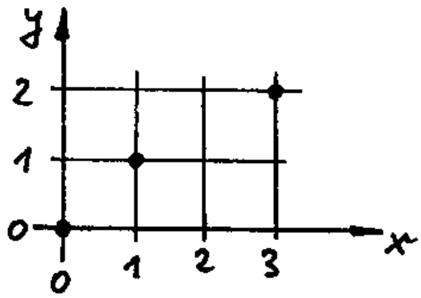
Bei einem ungedämpften Schwingungssystem, welches mit Resonanzfrequenz angeregt wird, wachsen die Amplituden nach der unten angegebenen Funktion:

$$y = a \cdot t \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Für eine größere Anzahl von Wertepaaren $[t_i, y_i]$ sollen die Ansatzfreiwerte a und ω bestimmt werden. Über den Ansatz "Minimum Fehlerquadrate" erhält man 2 Gleichungen mit den 2 Unbekannten a und ω. Bestimmen Sie diese 2 Gleichungen! Können Sie (in Worten) eine Lösungsstrategie zur Lösung des Gleichungssystems angeben?

Aufgabe 3 (10 P)

Für die 3 skizzierten Wertepaare soll mit der Interpolationsformel von Lagrange der Funktionswert an der Stelle x=2 bestimmt werden.



Aufgabe 4 (18 P)

Die folgende Gleichung besitzt eine reelle Nullstelle im Intervall [0,1].

$$y = -1 + x \cdot e^{x}$$

a. Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie einen Schätzwert für die Lösung!
b. Prüfen Sie die möglichen Schrittfunktionen hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften!
c. Führen Sie für die konvergente Schrittfunktion 4 Iterationsschritte durch mit dem Startwert $x^{(0)}=0,6$!
d. Bestimmen Sie die Lösung der Nullstelle mit dem Newton'schen Näherungsverfahren (gleicher Startwert, 2 Iterationsschritte)!

Aufgabe 5 (14 P)

Lösen Sie das nebenstehende Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Algorithmus mit teilweiser Pivotisierung und bestimmen Sie das Konditionsmaß K_H nach Hadamard!

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (12 P)

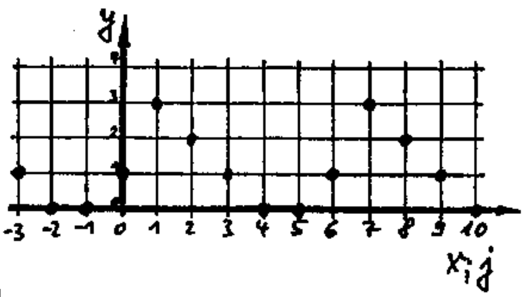
Die Funktion y=tan(x) soll im Bereich $0 \le x \le 45^0$ mit dem Stützstellenabstand 5^0 tabelliert werden. Schätzen Sie den Interpolationsfehler ab!
Bem.: auf Bogenmaß achten!

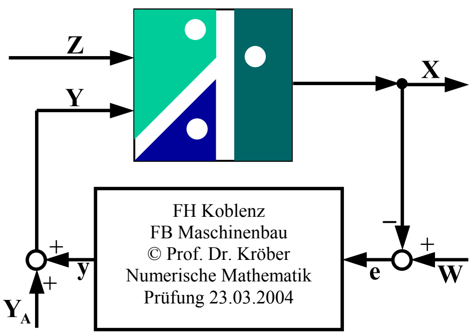
Hinweis: $y = \tan(x)$; $y' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$; $y'' = \dfrac{2 \cdot \sin(x)}{\cos^3(x)}$

Aufgabe 7 (18 P)

Für die gegebenen Wertepaare sind mit der Fourieranalyse folgende Werte zu bestimmen:

$$\frac{a_0}{2}\ ,\ a_1\ ,\ b_1\ ,\ A_1\ ,\ \varphi_{0_1}$$

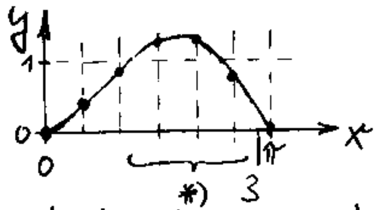




Lösungen Numerische Mathematik 23.03.04 / Blatt 1

zu 1)

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
y	→0	0,362	0,886	1,253	1,253	0,809	0



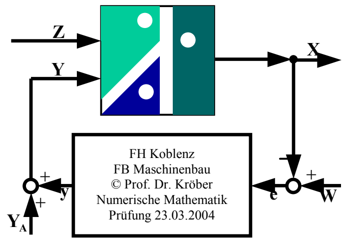
aus Skizze: $Q \approx 2{,}5$

*) hier Stützstellenabstände verringern (Bereich starker Krümmung)

$$Q = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)\ ;\ h = \pi/6$$

$$Q = \dots = 2{,}439$$

zu 2) $\phi = \sum_i \varphi_i^2$; $\varphi_i = y_i - a \cdot t_i \cdot \sin(\omega t_i)$; $\phi = \sum_i (y_i - a t_i \sin(\omega t_i))^2$



$$\frac{\partial\phi}{\partial a} = 2 \cdot \sum_i (\dots)(-1)\, t_i \cdot \sin(\omega t_i) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum_i (y_i - a t_i \sin \omega t_i)\, t_i \sin \omega t_i = 0$$

$$\sum_i y_i t_i \sin \omega t_i - a \sum_i t_i^2 \sin^2 \omega t_i = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial \omega} = 2 \sum_i (\dots)(-1)\, a \cdot t_i \cos(\omega t_i)\, t_i \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum_i (y_i - a t_i \sin \omega t_i)\, t_i^2 \cos \omega t_i = 0$$

$$\sum_i y_i t_i^2 \cos \omega t_i - a \sum_i t_i^3 \sin \omega t_i \cdot \cos \omega t_i = 0$$

Strategie: beide Gleichungen nach a auflösen, gleichsetzen → Gl. $f(\omega) = 0$ entsteht

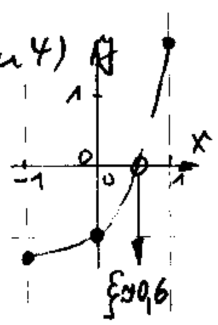
Startwert → Regula Falsi

zu 3)

$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$= 0 + 1\, \frac{2-0}{1-0} \cdot \frac{2-3}{1-3} + 2\, \frac{2-0}{3-0} \cdot \frac{2-1}{3-1} = \dots = \frac{5}{3}$$

zu 4)



$$0 = -1 + x e^x$$
$$1 = x e^x$$

$$\varphi_1(x) = x = e^{-x}$$
$$\varphi_1'(x) = -e^{-x}$$
$$\varphi_1'(0{,}6) = -0{,}549 \rightarrow \text{alt. konv.}$$

$$\varphi_2(x) = x = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$
$$\varphi_2'(x) = -\frac{1}{x}$$
$$\varphi_2'(0{,}6) = -1{,}\bar{6}\dots \rightarrow \text{alt. div.}$$

Wahl φ_1:

$\varphi_1(0{,}6) = e^{-0{,}6} = 0{,}5488$

$\varphi_1(0{,}5488) = \dots = 0{,}5776$

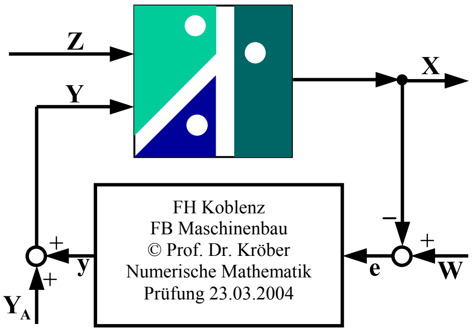
$\varphi_1(\dots) = \dots = 0{,}5612$

$\varphi_1(\dots) = \dots = 0{,}5705$

Newton: $$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{-1 + x e^x}{(1+x)e^x} = 0{,}6 - \frac{-1 + 0{,}6 e^{0{,}6}}{(1+0{,}6)e^{0{,}6}} = 0{,}5680$$

$$x^{(2)} = \dots = 0{,}5671$$ wobei: $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$

Lösungen Numerische Mathematik 23.04.03 / Blatt 2



zu 5)

$1^{(0)}$	-2	0	4	-2	
$2^{(0)}$	1	2	1	8	
$3^{(0)}$	0	4	2	10	
$2^{(1)}$	0	2	3	7	$2^{(0)} - 1^{(0)}\frac{1}{-2} = 2^{(0)} + \frac{1}{2}\cdot 1^{(0)}$
$3^{(1)}$	0	4	2	10	
$2^{(1)}$	0	4	2	10	
$3^{(1)}$	0	2	3	7	
$3^{(2)}$	0	0	2	2	$3^{(1)} - 2^{(1)}\frac{2}{4} = 3^{(1)} - \frac{1}{2}\cdot 2^{(1)}$

$2x_3 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$2x_2 + 3\cdot \underbrace{x_3}_{1} = 7 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$

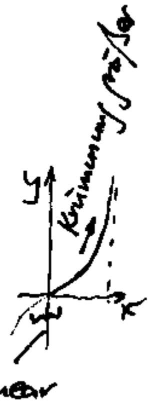
$-2x_1 + 0 + 4\cdot \underbrace{x_3}_{1} = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 3}}$

$$K_H = \frac{|\det A|}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{|-2\cdot 4\cdot 2|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{16}{\sqrt{20}\,\sqrt{6}\,\sqrt{20}} = \underline{\underline{0{,}3266}}$$

zu 6) $R(x) = \frac{|f''(\xi)|}{2!}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2$

Wo ist f'' max?

x	$0°$	$22{,}5°$	$45°$
$\frac{2\cdot\sin x}{\cos^3 x}$	0	0,971	4,000



$$R(x) = \frac{4{,}000}{2}\left(\frac{5°\frac{\pi}{180°}}{2}\right)^2$$

$$= \underline{\underline{0{,}00381}}$$

zu 7) $\underline{\underline{\frac{a_0}{2}}} = \frac{1}{6}(1+3+2+1) = \underline{\underline{\frac{7}{6}}}$

$\underline{\underline{a_1}} = \frac{2}{6}\left[1\cdot\cos 0° + 3\cdot\cos 60° + 2\cdot\cos 120° + 1\cdot\cos 180° + 0 + 0\right] = \dots = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

$\underline{\underline{b_1}} = \frac{2}{6}\left[1\,\sin 0° + 3\cdot\sin 60° + 2\cdot\sin 120° + 1\cdot\sin 180° + 0 + 0\right] = \dots = \underline{\underline{\frac{5}{6}\sqrt{3}}}$

$\underline{\underline{A_1}} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^2} \approx \underline{\underline{1{,}453}}$

$\tan\varphi_{01} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}\sqrt{3}} = \frac{1}{5\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_{01} = +6{,}59°}}$