Fachhochschule Koblenz Blatt 1 von 2
Fachbereich Maschinenbau
Numerische Mathematik WS 02/03
Prof. Dr. W. Kröber

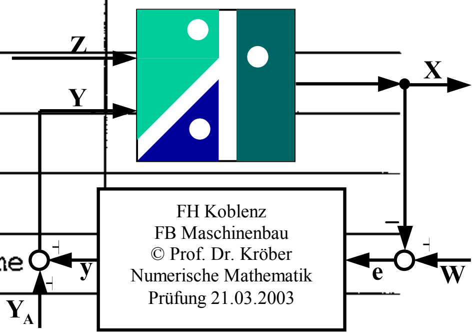
Name ____________________

Matr.-Nr. ____________________

Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

- Bearbeitungszeit : 90 min
- Erlaubte Hilfsmittel :
  - Schreib- und Zeichengerät
  - Taschenrechner
  - Literatur, Kopien
  - Vorlesungsmitschrift

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	Lösungen
3	
4	
5	
6	
7	
Summe	



Note : ____________________

Aufgabe 1 (16 P)

Die Funktion $y = x \cdot \sin(x)$ soll im Bereich $0 \le x \le \pi$ integriert werden.

a. Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an und schätzen Sie die Fläche unter der Kurve in dem betreffenden Intervall!
b. Bestimmen Sie die Fläche mit der Simpson'schen Regel (Stützstellenabstand sei $h = \pi/8$)! Bem.: auf Bogenmaß achten!
c. Bestimmen Sie den exakten Wert der Fläche!

Hilfestellung: $\int x \cdot \sin(x)\, dx = \sin(x) - x \cdot \cos(x) + C$

Aufgabe 2 (14 P)

Gegeben sind die folgenden beiden Geradengleichungen:

$$\begin{aligned} y &= \frac{9}{10}x + 1 \\ y &= x \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

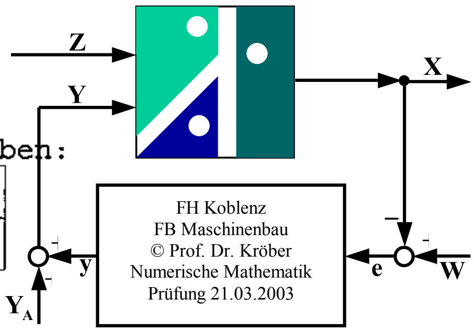
a. Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus mit teilweiser Pivotisierung!
b. Bestimmen Sie das Konditionsmaß nach Hadamard K_H !
c. Können Sie eine Aussage bezüglich der Größe des Konditionsmaßes im Zusammenhang mit einer geometrischen Deutung des Problems angeben? (Skizze = ?)

Aufgabe 3 (12 P)

Für eine Häufigkeitsverteilung der Windgeschwindigkeit ist der Ansatz

$$y = a x \cdot e^{(-b \cdot x)}$$

recht gut geeignet. Für eine größere Anzahl von Wertepaaren $[x_i, y_i]$ sollen die Ansatzfreiwerte a und b bestimmt werden. Über den Ansatz "Minimum Fehlerquadrate" erhält man 2 Gleichungen mit den 2 Unbekannten a und b. Bestimmen Sie diese 2 Gleichungen! Können Sie (in Worten) eine Lösungsstrategie zur Lösung des Gleichungssystems angeben?



Aufgabe 4 (12 P)

Von einer Funktion sind folgende Wertepaare gegeben:

x	...	1,4	1,5	1,6	...
y=f(x)	...	3,8	3,2	2,8	...

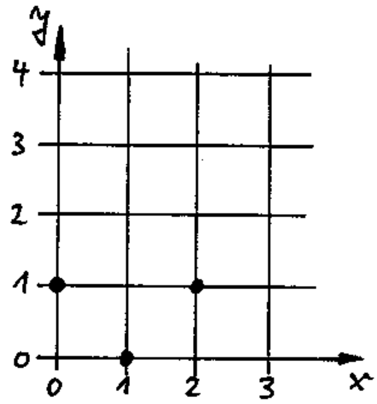
a. Bestimmen Sie mit Hilfe der Ihnen bekannten Möglichkeiten die bestmöglichen Näherungswerte für:

$f'(1,5)=\ldots \qquad f''(1,5)=\ldots \qquad \int_{1,4}^{1,6} y\,dx = \ldots$

b. Ermitteln Sie aus den Angaben eine obere Schranke für den zu erwartenden Interpolationsfehler, wenn zwischen den Stützstellen linear interpoliert wird!

Aufgabe 5 (10 P)

Für die 3 skizzierten Wertepaare soll mit der Interpolationsformel von Lagrange der Funktionswert an der Stelle x=3 bestimmt werden.
Zusatzfrage:
Wie könnte das numerische Ergebnis mit der Methode "scharfes Hinsehen" vorhergesagt werden?



Aufgabe 6 (18 P)

Die folgende Gleichung besitzt eine reelle Nullstelle.

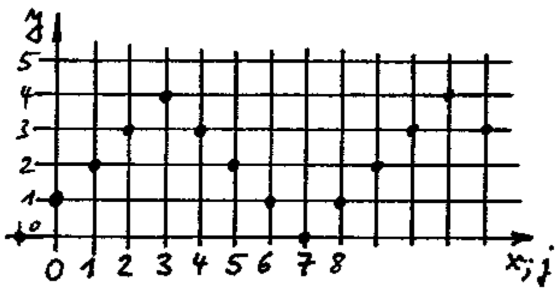
$$y = x^3+x-3$$

a. Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie einen Schätzwert für die Lösung!
b. Prüfen Sie die möglichen Schrittfunktionen hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften!
c. Führen Sie für die konvergente Schrittfunktion 4 Iterationsschritte durch mit dem Startwert $x^{(0)}=1,1$!
d. Bestimmen Sie die Lösung der Nullstelle mit dem Newton'schen Näherungsverfahren (gleicher Startwert, 2 Iterationsschritte)!

Aufgabe 7 (18 P)

Für die gegebenen Wertepaare sind mit der Fourieranalyse folgende Werte zu bestimmen:

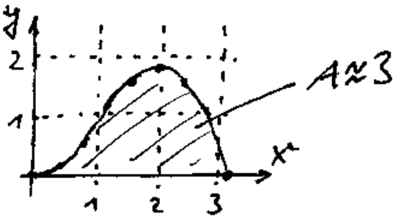
$$\frac{a_0}{2}\ ,\ a_1\ ,\ b_1\ ,\ A_1\ ,\ \varphi_{0_1}$$



Lösungen Numerische Mathematik 21.03.03 / Blatt 1

zu 1, a)

x	$0°$	$22{,}5°$	$45°$	$67{,}5°$	$90°$	$112{,}5°$	$135°$	$157{,}5°$	$180°$
y	0	$0{,}1503$	$0{,}5554$	$1{,}0884$	$1{,}5708$	$1{,}8140$	$1{,}6661$	$1{,}0520$	0



$$Q = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

b) $$Q = \frac{\pi/8}{3}\left[0+4\cdot 0{,}1503+2\cdot 0{,}5554+4\cdot 1{,}0884+2\cdot 1{,}5708+4\cdot 1{,}8140+2\cdot 1{,}6661+4\cdot 1{,}0520+0\right]$$

$$\underline{\underline{Q = 3{,}1419}}$$

c) $$\underline{\underline{A(=Q)}} = \int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = \left[\sin x - x\cos x\right]_0^{\pi} = \overset{\to 0}{\sin\pi} - \pi\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1} - 0 + 0 = \underline{\underline{\pi}}$$

zu 2, a)

$$\begin{array}{c|cc|c|}
1^{(0)} & -1 & 1 & 0 \\
2^{(0)} & -\frac{9}{10} & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & \frac{1}{10} & 1
\end{array}\; 2^{(0)} - 1^{(0)}\frac{-\frac{9}{10}}{-1} = 2^{(0)} - \frac{9}{10}\cdot 1^{(0)}$$

also: $$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt: $\underline{\underline{x = 10}}$; $\underline{\underline{y = 10}}$

b) $$\underline{\underline{K_H}} = \frac{|\det A|}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{\left|-1\cdot\frac{1}{10}\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{9}{10}\right)^2+1^2}} = \underline{\underline{0{,}0526}}$$ (Kondition „mittel")

c) Geraden nahezu parallel (geringe Veränderungen → Schnittpunkt ändert sich stark)

zu 3) $$\phi = \sum_i r_i^2 = \sum_i \left(y_i - a x_i e^{-bx_i}\right)^2 \to MIN$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial a} = 2\cdot\sum_i\left(y_i - a x_i e^{-bx_i}\right)x_i e^{-bx_i} \overset{!}{=} 0\;;\quad \sum_i\left(y_i - a x_i e^{-bx_i}\right)x_i e^{-bx_i} = 0$$

$$\underline{\underline{\sum_i x_i y_i e^{-bx_i} - a\sum_i x_i^2 e^{-bx_i}e^{-bx_i} = 0}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial b} = 2\sum_i\left(y_i - a x_i e^{-bx_i}\right)(-1)a x_i e^{-bx_i}(-x_i) \overset{!}{=} 0;\; 2(-1)a(-1)\underbrace{\sum_i\left(y_i - a x_i e^{-bx_i}\right)x_i^2 e^{-bx_i}}_{0} = 0$$

$$\underline{\underline{\sum_i x_i^2 y_i e^{-bx_i} - a\sum_i x_i^3 e^{-bx_i}e^{-bx_i} = 0}} \quad (2)$$

Gl. (1) nach a auflösen; in (2) einsetzen; Nullstelle Gl. (2) ist zu bestimmen; Startwert b… …REGULA FALSI

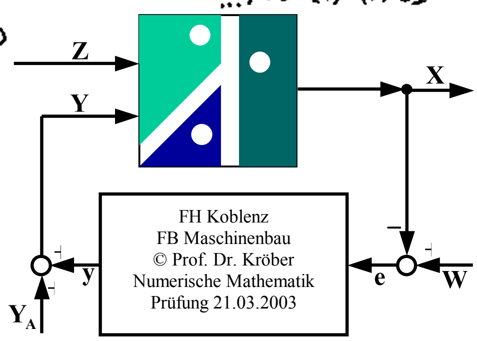
zu 4. a) $$\underline{f'(1{,}5)} = \frac{2{,}8-3{,}8}{2\cdot 0{,}1} = \underline{\underline{-5}}\;;\quad \underline{f''(1{,}5)} = \frac{2{,}8+3{,}8-2\cdot 3{,}2}{0{,}1^2} = \underline{\underline{20}}$$

$$\underline{\underline{\int_{1{,}4}^{1{,}6} y\,dx}} \approx \frac{0{,}1}{3}\left(3{,}8+4\cdot 3{,}2+2{,}8\right) = \underline{\underline{0{,}64\bar{6}\ldots}}$$

b) $$R(x) = \frac{1}{2!}f''(\xi)\left[(x-1{,}4)(x-1{,}5)\right] \le \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 0{,}05\cdot 0{,}05$$

$$= \underline{\underline{0{,}025}}$$

Bem.: bei y wäre Angabe einer weiteren Ziffer sinnvoll



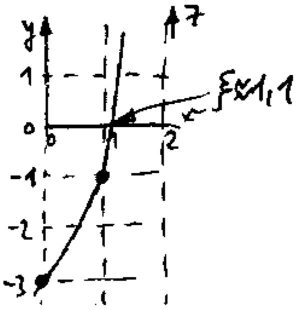
Lösungen Numerische Mathematik 21.03.03 Blatt 2

zu 5) $$y = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$= 1\,\frac{3-1}{0-1}\cdot\frac{3-2}{0-2} + 0 \qquad + 1\,\frac{3-0}{2-0}\cdot\frac{3-1}{2-1} = \dots = 4$$

Es handelt sich um eine nach rechts verschobene Parabel $[y=(x-1)^2]$

zu 6)



$0 = x^3 + x - 3$

$x^3 = 3 - x$

$x = \sqrt[3]{3-x} = \varphi_1(x) = (3-x)^{1/3}$

$\varphi_1'(x) = \frac{1}{3}(3-x)^{-2/3}(-1) = \frac{-1}{3(3-x)^{2/3}}$

$\underline{\underline{\varphi_1'(1{,}1) = -0{,}2173}}$

alternierend konvergent

$x = 3 - x^3 = \varphi_2(x)$

$\varphi_2'(x) = -3x^2$

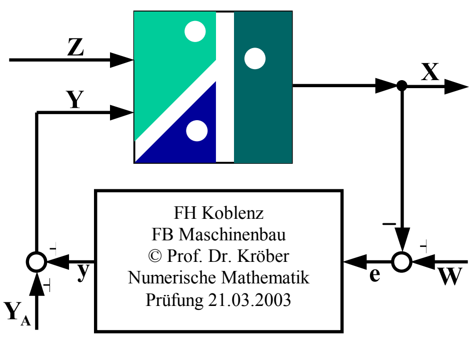
$\underline{\underline{\varphi_2'(1{,}1) = -3{,}63}}$

alternierend divergent

φ_1: $x^{(0)} = 1{,}1$; $x^{(1)} = (3-1{,}1)^{1/3} = 1{,}2386$; $x^{(2)} = \dots = 1{,}2077$; $x^{(3)} = 1{,}2147$; $x^{(4)} = 1{,}2131$

Newton: $x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - \frac{f(x^{(\nu)})}{f'(x^{(\nu)})}$; $f'(x) = 3x^2 + 1$

ν	$x^{(\nu)}$	$f(x^{(\nu)})$	$f'(x^{(\nu)})$	$x^{(\nu+1)}$
0	1,1	-0,5690	4,6300	1,2229
1	1,2229	0,0517	5,4865	1,2135



zu 7) $n = 8$

$a_0 = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j = \frac{2}{8}(1+2+3+4+3+2+1+0) = 4$

$\underline{\underline{\frac{a_0}{2} = 2}}$

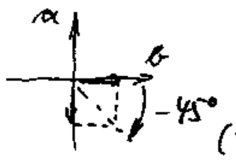
$a_1 = \dots = \frac{2}{8}[1\cdot\underbrace{\cos 0°}_{1} + 2\cdot\underbrace{\cos 45°}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} + 3\cdot\underbrace{\cos 90°}_{0} + 4\cdot\underbrace{\cos 135°}_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + 3\cdot\underbrace{\cos 180°}_{-1} + 2\cdot\underbrace{\cos 225°}_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + 1\cdot\underbrace{\cos 270°}_{0} + 0\cdot\underbrace{\cos 315°}_{\cancel{}}]$

$\underline{\underline{}} = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) = \underline{\underline{-1{,}2071}}$

$b_1 = \dots = \frac{2}{8}[1\cdot\sin 0° + 2\underbrace{\sin 45°}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} + 3\cdot\underbrace{\sin 90°}_{1} + 4\cdot\underbrace{\sin 135°}_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} + 3\cdot\underbrace{\sin 180°}_{0} + 2\cdot\underbrace{\sin 225°}_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + 1\cdot\underbrace{\sin 270°}_{-1} + 0\cdot\underbrace{\sin 315°}_{\cancel{}}]$

$\underline{\underline{}} = +\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) = \underline{\underline{+1{,}2071}}$

$\underline{\underline{A_1}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \underline{\underline{1{,}707}}$



(4. Quadrant)

bzw. $\tan\varphi_{01} = \frac{a}{b} = \frac{-1{,}2071}{+1{,}2071} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_{01} = -45°}}$