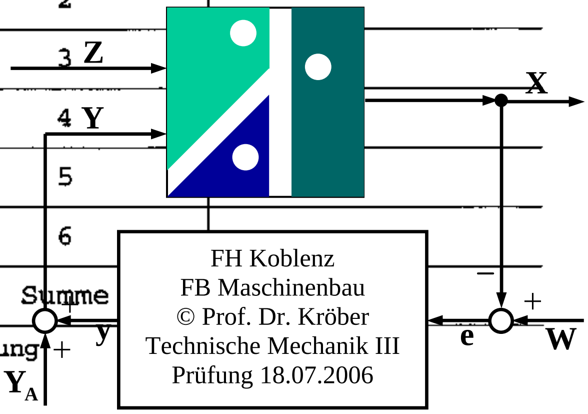
Fachbereich Maschinenbau
Technische Mechanik III   SS 06
Prof. Dr. W. Kröber

Name ____________________

Matr.-Nr. ____________________

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Summe	



Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

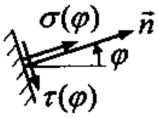
Bearbeitungszeit : 120 min

- Erlaubte Hilfsmittel :
  - Schreib- und Zeichengerät
  - Taschenrechner
  - Hilfsblätter:
    - Schwerpunkte von Flächen und Linien
    - Flächen- und Widerstandsmomente für die Biegung
    - Durchbiegungen und Neigungswinkel der ...
    - Knicken - Formeln und Daten
    - Querschnittsgrößen bei der Torsion von Stäben mit nicht kreisförmigem ...
    - Mohrscher Kreis, Formänderungen und Vergleichsspannungen
    - Massenträgheitsmomente homogener Körper

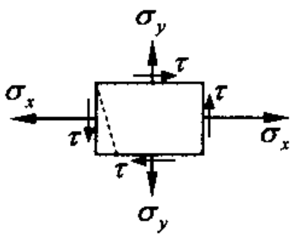
Note : ____________________

Hinweise:

Festlegung der (positiven) Schnittgrößen am Bauteil:



Definition der Spannungen in einem gegebenen x-y-Koordinatensystem:



$$\sigma(\varphi) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2\varphi) + \tau \cdot \sin(2\varphi)$$

$$\tau(\varphi) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin(2\varphi) - \tau \cdot \cos(2\varphi)$$

Spannungen in einem dünnwandigen Rohr mit der Wandstärke t:

$$\sigma_t = \frac{R}{t} \cdot p \qquad \sigma_a = \frac{R}{2 \cdot t} \cdot p$$

Berechnung der Schubspannung durch eine Querkraft:

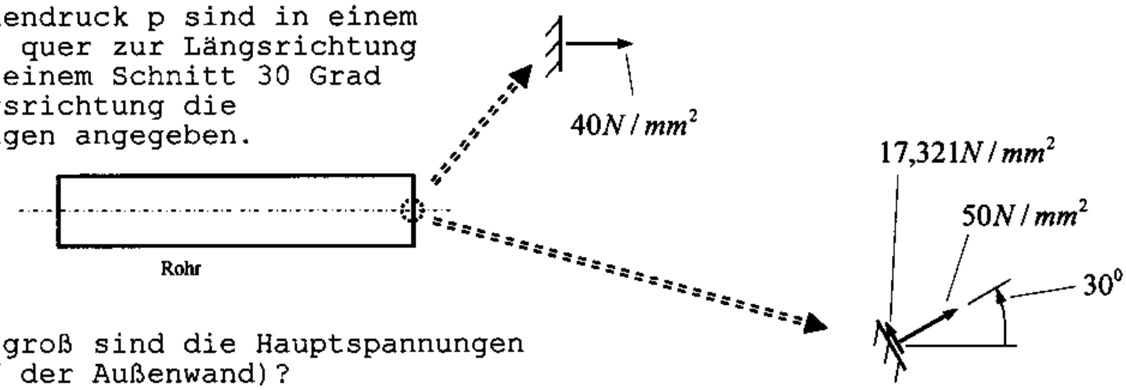
$$\tau_q(z) = \frac{Q(x) \cdot H_y(z)}{I_y \cdot b(z)}$$

Drall eines Rotors:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \qquad \textit{oder auch} \qquad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Aufgabe 1 (16P)

Auf der Außenwand eines Rohres mit dem Innendruck p sind in einem Schnitt quer zur Längsrichtung und in einem Schnitt 30 Grad zu Längsrichtung die Spannungen angegeben.



a. Wie groß sind die Hauptspannungen (auf der Außenwand)?

b. In Teil b. wollen wir unterstellen, dass es sich bei dem Rohr um ein dünnwandiges Rohr mit einem Durchmesser von 20 mm und einer Wandstärke von 1 mm handelt. Wie groß ist dann der Innendruck p?

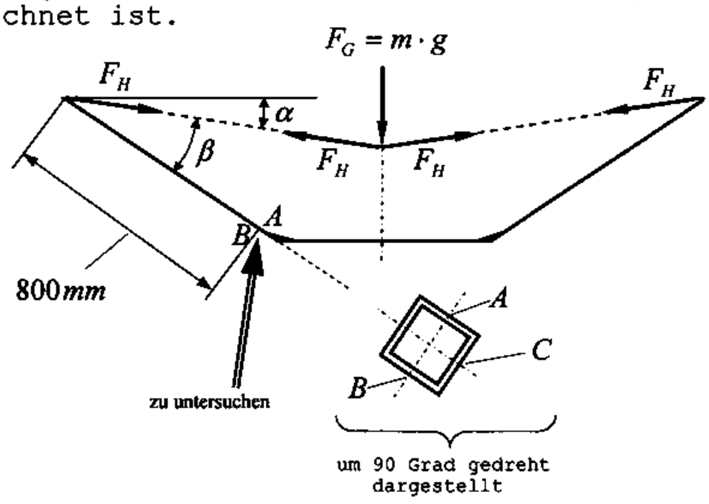
Aufgabe 2 (24P)

In einer Hängematte sitzt mittig ein Mensch mit der Gewichtskraft F_G=800N. Durch diese Gewichtskraft wird die Hängematte mit einer Zugkraft F_H vorgespannt. Hieraus resultiert die Belastung für das Tragegestell. Für die Berechnung wird das Eigengewicht der Hängematte sowie das Eigengewicht des Tragegestells vernachlässigt. Ferner wird angenommen, dass sich die gesamte Hängemattenkonstruktion als ein ebenes Problem auffassen lässt. Die untere Trägerkonstruktion besteht aus quadratischem Vierkantrohr (Breite außen 60mm, Wandstärke 4mm). Zu untersuchen sind die Spannungsverhältnisse in dem Querschnitt, der durch den dicken Pfeil gekennzeichnet ist.

Ferner gegeben:

$\alpha = 10^0; \beta = 25^0$

FH Koblenz
FB Maschinenbau
© Prof. Dr. Kröber
Technische Mechanik III
Prüfung 18.07.2006



a. Weisen Sie nach, dass zwischen der Zugkraft F_H in der Hängematte und der Gewichtskraft des Nutzers folgende Gleichung besteht:

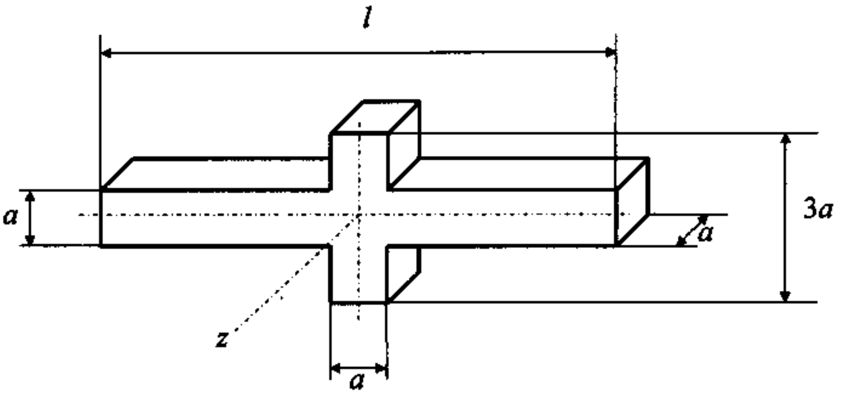
$$F_H = \frac{F_G}{2 \cdot \sin\alpha}$$

b. Bestimmen Sie die Normalspannungen in den Punkten A und B!

c. Bestimmen Sie die Schubspannung dem Punkt C!

Aufgabe 3 (10P)

Für das abgebildete Kreuz (Dichte ρ) ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse (J_z) zu bilden. Ziel: $J_z = f(\rho, l, a)$



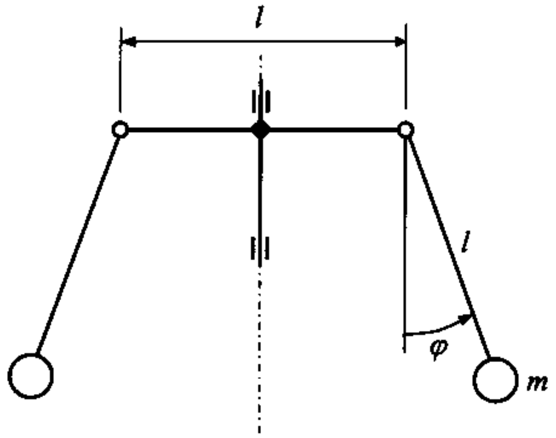
Aufgabe 4 (10P)

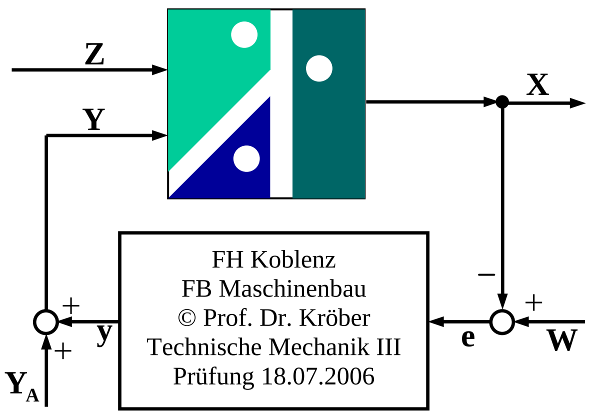
Das abgebildete System dreht um die vertikale Achse. Wenn das System eine hinreichend lange Zeit in Drehung versetzt wird, stellt sich bei einer bestimmten Drehzahl eine bestimmte Winkelauslenkung ein. Die Anordnung kann man dazu verwenden, um aus einer gemessenen Winkelauslenkung auf die Drehzahl n [1/min] zu schließen.
Annahme: Die Gestängeanteile seien masselos.

Ermitteln Sie folgenden Zusammenhang:

Geg.: m, g, l, φ

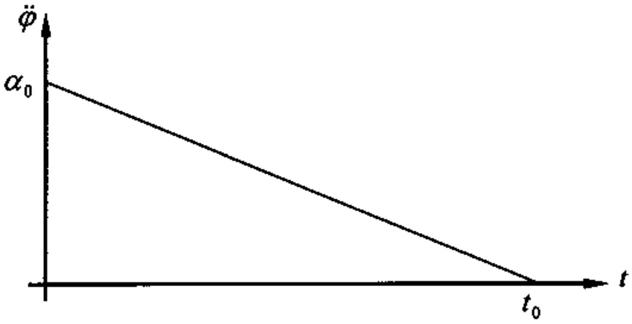
Ges.: $n = f(g, l, \varphi)$





Aufgabe 5 (18P)

Ein Drehantrieb (gesamtes Massenträgheitsmoment $J=0{,}25\ \mathrm{kgm}^2$) besteht aus einem Hydraulikmotor und einem Rotor. Das Drehmoment des Motors ist so eingestellt, dass sich der abgebildete Verlauf für die Winkelbeschleunigung ergibt. Die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ beträgt zu Beginn der Beschleunigungsphase $\alpha_0 = 300 s^{-2}$. Von der Anfangsdrehzahl Null erreicht die Welle in der Zeit t_0 eine Enddrehzahl von 1500 1/min.



a. Bestimmen Sie die Dauer des Beschleunigungsvorganges!

b. Wie viele Umdrehungen dreht die Welle während der gesamten Beschleunigungsphase?

c. Wie groß ist das Drehmoment zu Beginn der Beschleunigungsphase?

d. Welche Arbeit wird bei der Beschleunigung verrichtet?

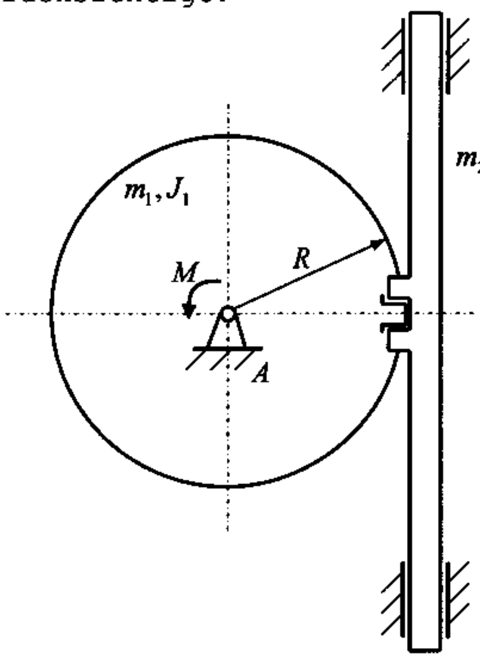
e. Wie groß ist der Drall L des drehenden Systems?

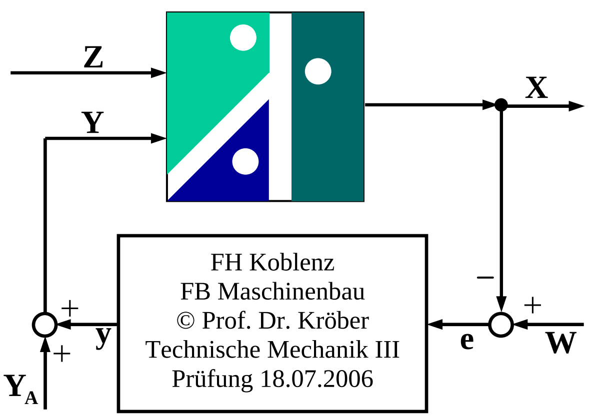
Aufgabe 6 (22P)

Die vertikal angeordnete Zahnstange und das Zahnrad sind mit einer Verzahnung gekoppelt. Das Zahnrad wird mit einem Moment M angetrieben. Bei der dargestellten Verzahnung wird eine Rechteckverzahnung angenommen, d.h. die Kraft an der Verzahnung wirkt stets vertikal. Reibungseinflüsse bleiben generell unberücksichtigt.

Geg.: g, J_1, m_1, m_2, R, M

Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung des Zahnrades, die Beschleunigung der Zahnstange, die Kraftwirkung am Zahnrad sowie die Auflagerkraft im Lager A in Abhängigkeit der gegebenen Größen!





Lösungen Prüfung TM III vom 18.07.06 Blatt 1

zu 1,a) Beim Schnitt quer zur Längsrichtung ist $\tau(\varphi)=0$, daher ist $\underline{\underline{\sigma_x = 40\,N/mm^2}}$ eine Hauptspannung und $\tau = 0$.

also: $$\sigma(\varphi) = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\varphi) + \cancel{\tau}^{0}\cdot\sin(2\varphi) \qquad (1)$$

$$\tau(\varphi) = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\sin(2\varphi) - \cancel{\tau}^{0}\cdot\cos(2\varphi) \qquad (2)$$

Bem.: Beim Rohr sind die Hauptspannungsrichtungen stets in Längsrichtung und genau quer dazu

$\varphi=30°$: Gl. (1) : $$50\,N/mm^2 = \frac{40\,N/mm^2+\sigma_y}{2} + \frac{40\,N/mm^2-\sigma_y}{2}\cos(2\cdot 30°)$$

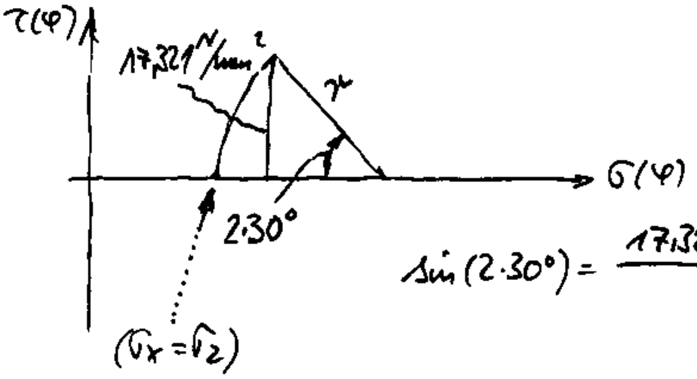
aufgelöst nach σ_y ergibt : $\underline{\sigma_y} = \ldots = \underline{\underline{80\,N/mm^2}}$

oder alternativ aus Gl. (2):

$$-17{,}321\,N/mm^2 = \frac{40\,N/mm^2-\sigma_y}{2}\cdot\sin(2\cdot 30°)$$

aufgelöst nach σ_y ergibt sich auch $\sigma_y = 80\,N/mm^2$

Weitere Alternative (ohne Rücksicht auf Vorzeichen von $\tau(\varphi)$):



$$\sin(2\cdot 30°) = \frac{17{,}321\,N/mm^2}{r} \Rightarrow r = \frac{17{,}321}{\sin 60°}\,N/mm^2$$

$$= 20\,N/mm^2$$

Weil $\sigma_x = 40\,N/mm^2$ die kleinere Hauptspannung sein muss (Rohr, bzw. dünnwandiges Rohr) folgt:

$$\underset{\sigma_1}{\sigma_y} = \underset{\sigma_2}{\sigma_x} + 2\cdot r = (40+2\cdot 20)\,N/mm^2 = 80\,N/mm^2$$

zu 1,b) $\sigma_t = \frac{R}{t}\cdot p \Rightarrow p = \sigma_t\frac{t}{R}$; $\sigma_t = \sigma_y = \sigma_1$

$$\underline{p} = 80\,N/mm^2\,\frac{1\,mm}{\frac{20\,mm}{2}} = 8\,N/mm^2 = \underline{\underline{80\,bar}}$$

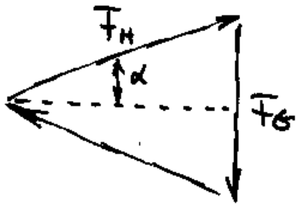
Lösungen Prüfung TM III vom 18.07.06 Blatt 2

zu 1,b) $\sigma_a = \frac{R}{2\cdot t}\, p \Rightarrow p = \sigma_a \frac{2t}{R}$; $\sigma_a = \sigma_x = \sigma_z$

$$p = 40\,\frac{N}{mm^2} \cdot \frac{2\cdot 1mm}{\frac{20mm}{2}} = 8\,N/mm^2 = 80\,bar$$

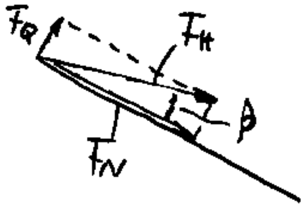
Bem.: Diese Alternative war lösbar ohne Aufgabenteil a vorher zu bearbeiten.

zu 2,a)



$$\sin\alpha = \frac{F_G/2}{F_H} \Rightarrow F_H = \frac{\overbrace{F_G}^{=m\cdot g}}{2\cdot\sin\alpha}$$

zu 2,b)



Normalkraft:

$$F_N = F_H\cdot\cos\beta = \frac{F_G}{2\cdot\sin\alpha}\cdot\cos\beta$$

$$= \underbrace{\frac{800N}{2\cdot\sin 10^\circ}}_{2303,5N}\cdot\cos 25^\circ$$

$$F_N = 2087,7N$$

Querkraft:

$$F_Q = F_H\cdot\sin\beta = 2303,5N\cdot\sin 25^\circ$$

$$= 973,5N$$

Druckspannung: $\sigma_d = \frac{F_N}{A} = \frac{2087,7\,N}{(60^2-52^2)mm^2} = 2,33\,N/mm^2$ (Druck)

Biegespannung: $\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$; $W_b = \frac{J}{e} = \frac{\frac{1}{12}(60^4-52^4)mm^4}{30mm}$

$$= \frac{470699\,mm^4}{30mm} = 15690\,mm^3$$

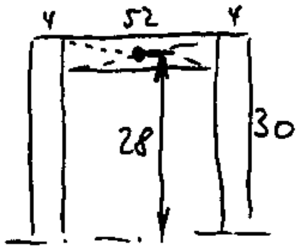
$$\sigma_b = \frac{973,5\cdot 800}{15690}\,N/mm^2 = 49,64\,N/mm^2$$

Lösungen Prüfung TM III vom 18.07.06 Blatt 3

zu 2,b) A: $\sigma_A = -(2{,}33 + 49{,}64)\,N/mm^2 = \underline{\underline{-51{,}97\,N/mm^2}}$ (Druck)

B: $\sigma_B = (49{,}64 - 2{,}33)\,N/mm^2 = \underline{\underline{+47{,}31\,N/mm^2}}$ (Zug)

zu 2,c)



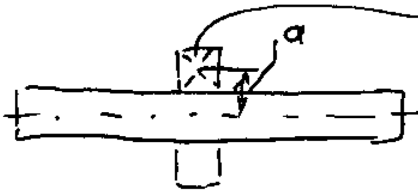
$$H_y = (52 \cdot 4 \cdot 28 + 2\,(4 \cdot 30 \cdot 15))\,mm^3 = 9424\,mm^3$$

oder:

$$H_y = \tfrac{1}{2}\,(60 \cdot 30^2 - 52 \cdot 26^2)\,mm^3 = 9424\,mm^3$$

$$\underline{\underline{\tau_q}} = \frac{Q(x) \cdot H_y(z)}{J_y \cdot b(z)} = \frac{973{,}5 \cdot 9424}{470699 \cdot 8}\,N/mm^2 = \underline{\underline{2{,}44\,N/mm^2}} \text{ (bei C)}$$

zu 3)

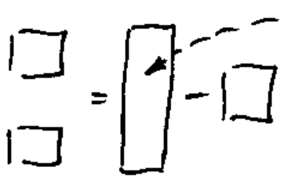


$$J_z = a^2 \ell \cdot \rho\,(\ell^2 + a^2)\tfrac{1}{12} + \Big[a^3 \cdot \rho\,(a^2 + a^2)\tfrac{1}{12} + \underbrace{a^3 \cdot \rho \cdot a^2}_{\text{Steiner Anteil}}\Big] \cdot 2$$

$$= \tfrac{1}{12}\,a^2 \ell \rho\,(\ell^2 + a^2) + \underbrace{\Big[\tfrac{2}{12}\,a^5 \cdot \rho + a^5 \cdot \rho\Big] \cdot 2}_{\frac{7}{3} a^5 \cdot \rho}$$

$$\underline{\underline{J_z}} = a^2 \cdot \rho\Big[\tfrac{1}{12}\,\ell(\ell^2 + a^2) + \tfrac{7}{3}\,a^3\Big] = \underline{\underline{\frac{a^2 \cdot \rho}{12}\,(\ell^3 + \ell a^2 + 28 a^3)}}$$

Detailalternative:

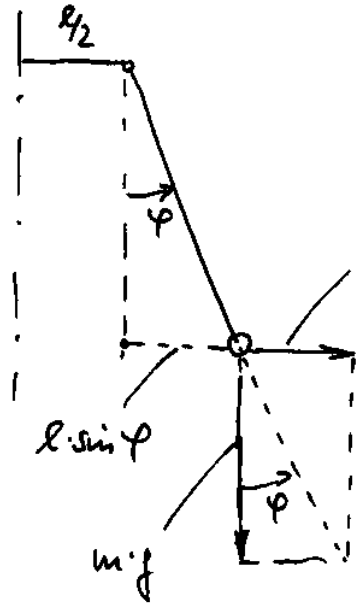


$$J_{z_{Detail}} = \overbrace{3 \cdot a^3 \cdot \rho}^{m}\,(a^2 + (3a)^2)\tfrac{1}{12} - a^3 \cdot \rho\,(a^2 + a^2) \cdot \tfrac{1}{12}$$

$$= \ldots = \tfrac{7}{3}\,a^5 \cdot \rho$$

Lösungen Prüfung TM III vom 18.07.06 Blatt 4

zu 4)



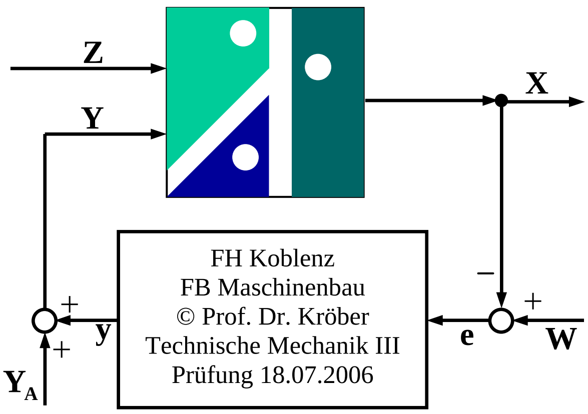
$$F_Z = m\cdot r\cdot\omega^2 = m\left(\frac{l}{2} + l\cdot\sin\varphi\right)\omega^2$$

$$\tan\varphi = \frac{\cancel{m}\left(\frac{l}{2} + l\sin\varphi\right)\omega^2}{\cancel{m}\cdot g}$$

$$\omega^2 = \frac{g\cdot\tan\varphi}{l\left(\frac{1}{2}+\sin\varphi\right)} = \left(\frac{\pi\cdot n}{30}\right)^2$$

$$\underline{\underline{n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g\cdot\tan\varphi}{l\left(\frac{1}{2}+\sin\varphi\right)}}}}$$

zu 5, a)



$$\ddot\varphi = \alpha_0 - m\cdot t \; ; \; m = \frac{\alpha_0}{t_0}$$

$$\ddot\varphi = \ddot\varphi(t) = \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{t_0}t$$

Integration:

$$\dot\varphi = \alpha_0\cdot t - \frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{t_0}t^2 + C_1$$

Anfangsbed.: $\dot\varphi(t=0) = 0$

$$0 = \alpha_0\cdot 0 - \frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{t_0}0^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

also:

$$\underline{\underline{\dot\varphi = \alpha_0\cdot t - \frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{t_0}t^2}}$$

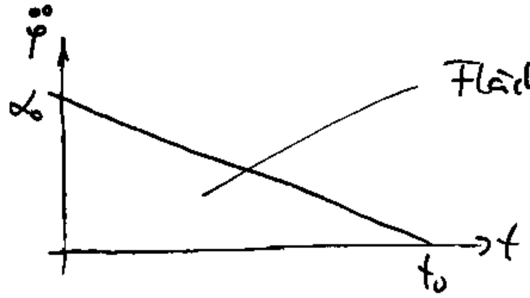
$t = t_0$:

$$\dot\varphi(t=t_0) = \alpha_0\cdot t_0 - \frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{t_0}t_0^2 = \frac{1}{2}\alpha_0 t_0$$

siehe Detailalternative (nächste Seite)

$$\underline{\underline{t_0}} = \frac{2\cdot\dot\varphi(t=t_0)}{\alpha_0} = \frac{2\cdot\omega}{\alpha_0} = \frac{2\cdot\frac{\pi}{30}\cdot 1500}{300}\,s = \underline{\underline{1{,}047\,s}}$$

Detailalternative:



Fläche $= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t_0 =$ Änderung der Winkelgeschw.
$= \dot{\varphi}(t=t_0) = \omega$

zu 5,b) Nochmalige Integration:

$$\underline{\underline{\varphi = \frac{1}{2}\alpha_0 t^2 - \frac{1}{6}\frac{\alpha_0}{t_0}t^3}} + \cancel{C_2} \quad C_2 = 0 \text{ weil } \varphi \text{ zählt ab } t=0$$

$t = t_0$:

$$\varphi(t=t_0) = \frac{1}{2}\alpha_0 t_0^2 - \frac{1}{6}\frac{\alpha_0}{t_0}t_0^3 = \frac{1}{3}\alpha_0 t_0^2 = \frac{1}{3}300 \cdot 1{,}047^2 (\text{rad}) = 109{,}66\ (\text{rad})$$

$$\frac{109{,}66}{2\pi} = \underline{\underline{17{,}45 \text{ Umdrehungen}}}$$

zu 5,c) $J \cdot \ddot{\varphi} = M$

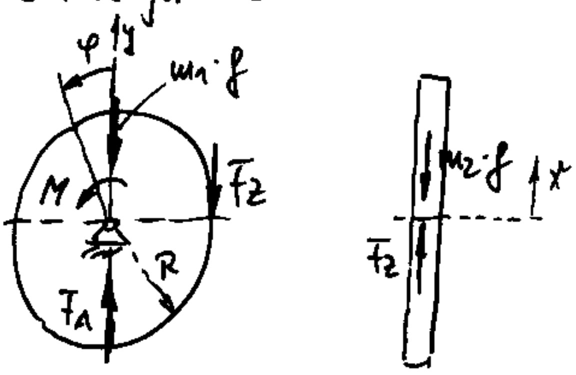
$$\underline{\underline{M}} = J \cdot \ddot{\varphi} = 0{,}25 \cdot 300\ \text{Nm} = \underline{\underline{75\,\text{Nm}}}$$

zu 5,d) $W = E_{kin_{nachher}} - \cancel{E_{kin_{vorher}}}^{\,0} = \frac{J}{2}\omega^2$; $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$

$$\underline{\underline{W}} = \frac{0{,}25}{2}\left(\frac{\pi \cdot 1500}{30}\right)^2 J = \underline{\underline{3084\ J}}$$

zu 5,e) $\underline{\underline{L}} = J \cdot \omega = J \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = 0{,}25\ \text{kgm}^2 \cdot \frac{\pi \cdot 1500}{30} s^{-1} = \underline{\underline{39{,}27\ \frac{\text{kgm}^2}{s}}}$

Bem.: Aufgabenteile (a+b), c, d, e können unabhängig voneinander gelöst werden zu 6) 2 Teilsysteme



$$m_1 \cancel{\ddot{y}}^{\,0} = F_A - m_1 \cdot g - F_Z \Rightarrow F_A = m_1 \cdot g + F_Z \quad (1)$$

$$J_1 \ddot{\varphi} = M - F_Z \cdot R \quad (2)$$

$$m_2 \ddot{x} = F_Z - m_2 \cdot g \Rightarrow F_Z = m_2 \ddot{x} + m_2 \cdot g \quad (3)$$

$$\ddot{x} = R \cdot \ddot{\varphi} \quad (4)$$

---

(3) in (2):

$$J_1 \ddot{\varphi} = M - (m_2 \ddot{x} + m_2 g) R$$

(4) auch eingesetzt:

$$J_1 \ddot{\varphi} = M - (m_2 R \ddot{\varphi} + m_2 g) R$$

$$\ddot{\varphi} (J_1 + m_2 R^2) = M - m_2 g \cdot R$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M - m_2 \cdot g \cdot R}{J_1 + m_2 R^2}$$

in (4):

$$\ddot{x} = R \, \frac{M - m_2 g R}{J_1 + m_2 R^2}$$

in (3):

$$F_Z = \ldots = m_2 \left(R \, \frac{M - m_2 g \cdot R}{J_1 + m_2 R^2} + g \right)$$

in (1):

$$F_A = m_1 \cdot g + m_2 \left(R \, \frac{M - m_2 g \cdot R}{J_1 + m_2 R^2} + g \right)$$