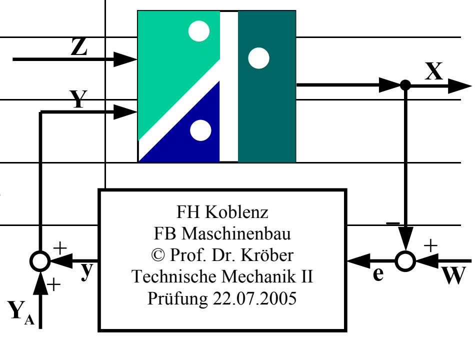
Fachhochschule Koblenz
Fachbereich Maschinenbau
Technische Mechanik II SS 05
Prof. Dr. W. Kröber

Name ______________________________

Matr.-Nr. _________________________

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Summe	



Bitte lösen Sie jede Aufgabe auf dem vorgesehenen Blatt. Beschriften Sie möglichst nur die Vorderseiten. Verwenden Sie bei Bedarf Zusatzblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikel-Nummer.
Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

Bearbeitungszeit : 120 min

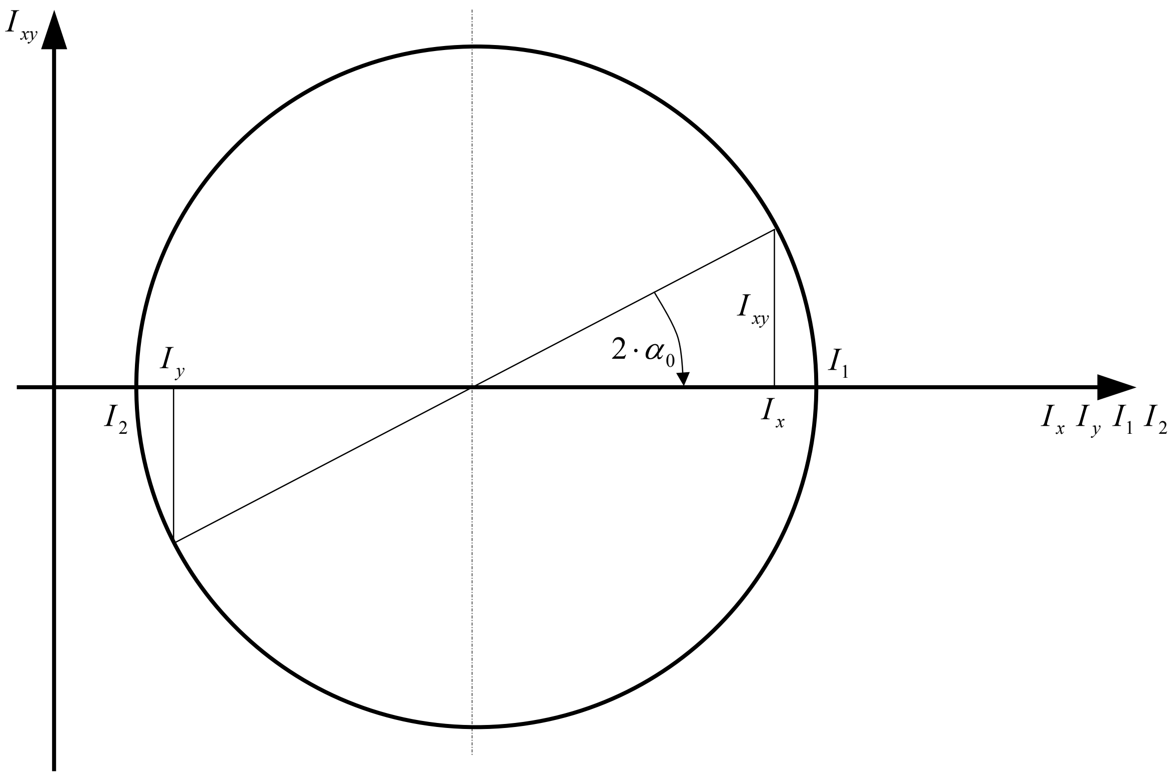
- Erlaubte Hilfsmittel :
  - Schreib- und Zeichengerät
  - Taschenrechner
  - Hilfsblätter:
    - Schwerpunkte von Flächen und Linien
    - Flächen- und Widerstandsmomente für die Biegung
    - Durchbiegungen und Neigungswinkel der ...
    - Knicken - Formeln und Daten

Note : ____________________________

Hinweise zum Mohr'schen Trägheitskreis:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}}$$

$$\tan(2 \cdot \alpha_0) = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

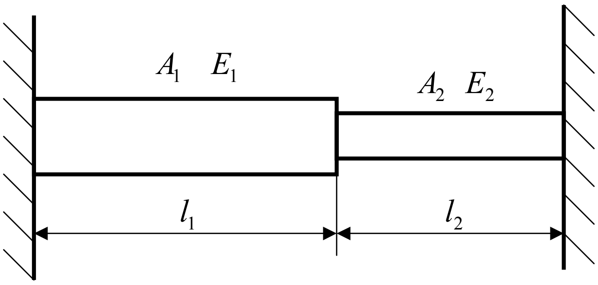


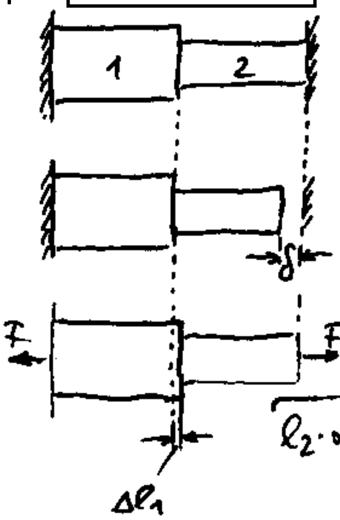
Aufgabe 1 (16P)

Stab 1 (Stahl) und Stab 2 (Aluminium) passen bei der Ausgangstemperatur genau in den starren Zwischenraum und sind fest miteinander und den Wänden verbunden. Stab 2 (nur Stab 2) wird dann um die Temperatur $\Delta\vartheta$ <u>abgekühlt</u> (Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha = \alpha_2$). Welche Zugkraft stellt sich ein? Um welches Maß Δl_1 wird Stab 1 gelängt? Gesucht ist jeweils die formelmäßige und numerische Lösung.

Zahlenwerte für die numerische Lösung:
$A_1 = 200\ mm^2$; $E_1 = 210000\ N/mm^2$; $l_1 = 600\ mm$;
$A_2 = 100\ mm^2$; $E_2 = 70000\ N/mm^2$; $l_2 = 500\ mm$;
$\alpha = \alpha_2 = 24 \cdot 10^{-6} k^{-1}$; $\Delta\vartheta = 40^0 C$

FH Koblenz
FB Maschinenbau
© Prof. Dr. Kröber
Technische Mechanik II
Prüfung 22.07.2005





$\delta = l_2 \cdot \alpha_2 \cdot \Delta\vartheta = 500mm \cdot 24 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K} \cdot 40°C = 0{,}48mm$

dann Längung beider Stäbe infolge Längskraft, so dass:

$\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2$; $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$

$$l_2 \cdot \alpha_2 \cdot \Delta\vartheta = \frac{F l_1}{E_1 A_1} + \frac{F l_2}{E_2 A_2}$$

$$= F\left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\right)$$

$$F = \frac{l_2 \alpha_2 \Delta\vartheta}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}} \quad ; \quad \Delta l_1 = \frac{F \cdot l_1}{E_1 A_1} = \frac{l_1}{E_1 A_1} \cdot \frac{l_2 \alpha_2 \Delta\vartheta}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}}$$

$$F = \frac{500mm \cdot 24 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K} \cdot 40°C}{\frac{600mm}{210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 200mm^2} + \frac{500mm}{70000 \frac{N}{mm^2} \cdot 100mm^2}}$$

$= 5600\ N$ (Zug)

$$\Delta l_1 = \frac{5600N \cdot 600mm}{210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 200mm^2} = 0{,}08mm$$

Probe: $\Delta l_2 = \frac{F l_2}{E_2 A_2} = \ldots = 0{,}40mm$

$\Sigma = \delta = 0{,}48mm$

Aufgabe 2 (20P)

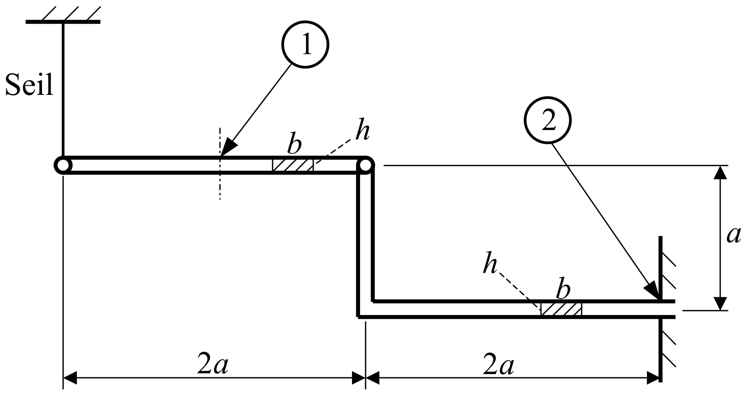
Für die abgebildete Anordnung sind an den Punkten ① und ② zu bestimmen:

- Biegemoment (Vorzeichen Biegemoment ist ohne Bedeutung),
- Biegespannung (Zug/Druck = ?) jeweils an der Oberseite (wie in Skizze)

Als Belastung wird nur das Eigengewicht der Trägerelemente in Ansatz gebracht. Die Massen der Gelenke können vernachlässigt werden. Der Träger hat Flachstahlprofil der Breite b und Höhe h. Ein Trägerelement der Länge a hat eine Masse von 3,14 kg.

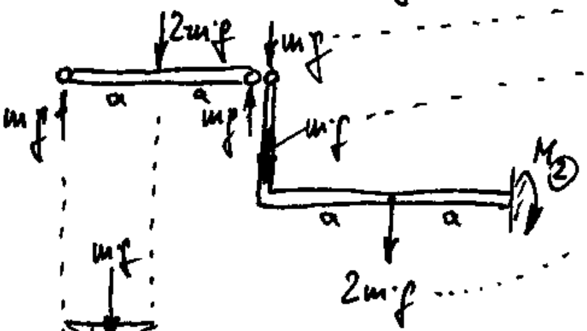
Weitere Zahlenwerte:
b = 50 mm; h = 10 mm;
a = 800 mm; g = 9,81 m/s^2

Hinweis:
Damit kein Trägerelement vergessen wird, sei erwähnt, dass die Gesamtmasse aller Trägerelemente 5 mal 3,14 kg beträgt.



FH Koblenz
FB Maschinenbau
© Prof. Dr. Kröber
Technische Mechanik II
Prüfung 22.07.2005

Auf- und Zwischenlagerreaktionen ($m = 3{,}14\,kg$):



$$M_{②} = m\cdot g\cdot 2a + m\cdot g\cdot 2a + 2\cdot m\cdot g\cdot a$$
$$= 6\cdot m\cdot g\cdot a = 6\cdot 3{,}14\,kg\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}8\,m = 147{,}86\,Nm$$

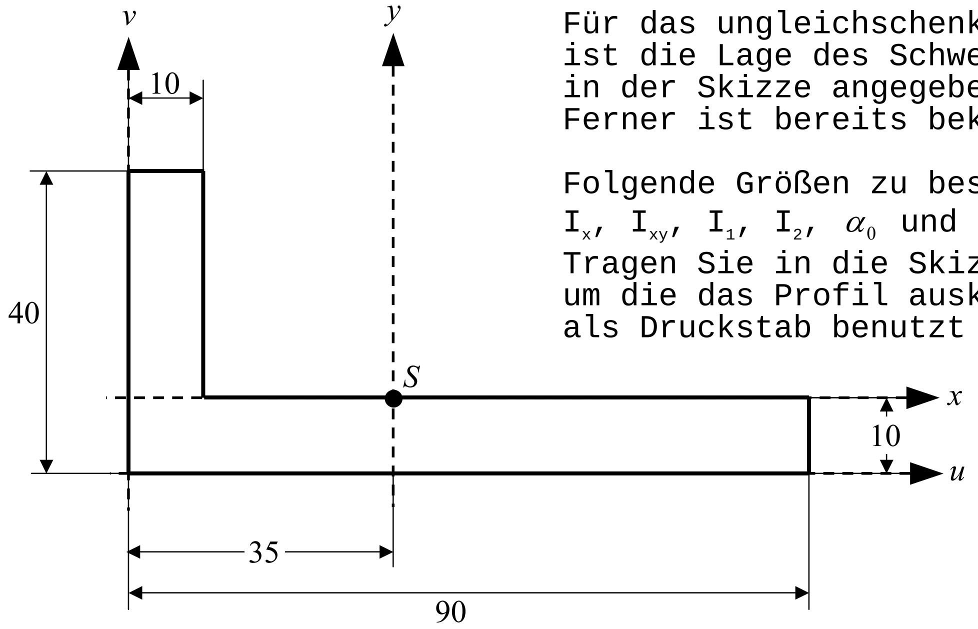
$$M_{①} = m\cdot g\cdot a - m\cdot g\,\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\,m\cdot g\cdot a = \frac{1}{2}\cdot 3{,}14\,kg\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}8\,m = 12{,}32\,Nm$$

$$W_b = \frac{b\cdot h^2}{6} = \frac{50\,mm\cdot(10\,mm)^2}{6} = 833{,}\bar{3}\ldots\,mm^3$$

$$\sigma_{b①} = \frac{M_{b①}}{W_b} = \frac{12{,}32\cdot 1000\,Nmm}{833{,}\bar{3}\ldots\,mm^3} = 14{,}8\,\frac{N}{mm^2}\ \text{(Oberseite = Druck)}$$

$$\sigma_{b②} = \frac{M_{b②}}{W_b} = \frac{147{,}86\cdot 1000\,Nmm}{833{,}\bar{3}\ldots\,mm^3} = 177{,}4\,\frac{N}{mm^2}\ \text{(Oberseite = Zug)}$$

Aufgabe 3 (18P)

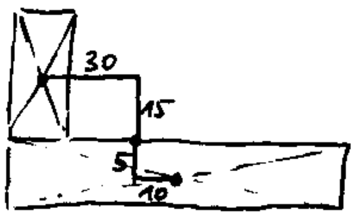


Für das ungleichschenklige Winkelprofil ist die Lage des Schwerpunktes bereits in der Skizze angegeben.
Ferner ist bereits bekannt: $I_y = 97\ cm^4$

Folgende Größen zu bestimmen:
I_x, I_{xy}, I_1, I_2, α_0 und i_{min}
Tragen Sie in die Skizze die Achse ein, um die das Profil ausknickt, falls es als Druckstab benutzt wird!

$$J_x = \left(\frac{1}{12}\cdot 90\cdot 10^3 + 5^2\cdot\underbrace{90\cdot 10}_{900} + \frac{1}{12}\cdot 10\cdot 30^3 + 15^2\cdot\underbrace{10\cdot 30}_{300}\right)mm^4 = \underline{\underline{12\ cm^4}}$$

$$J_{xy} = (0 - 5\cdot 10\cdot 900 + 0 - 15\cdot 30\cdot 300)\,mm^4 = \underline{\underline{-18\ cm^4}}$$



$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$= \Bigg[\underbrace{\frac{12+97}{2}}_{54,5} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{12-97}{2}\right)^2 + (-18)^2}}_{46,155}\Bigg]cm^4 \rightarrow \underline{\underline{J_1 = 100,65\ cm^4}} \rightarrow \underline{\underline{J_2 = 8,345\ cm^4}}$$

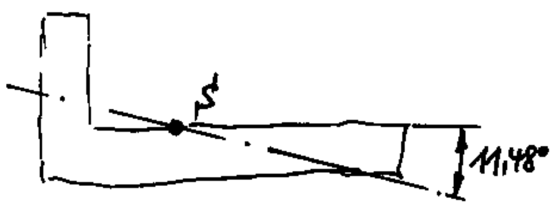
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\cdot J_{xy}}{J_x - J_y} = -\frac{2(-18)}{12-97} = -0,4235 \rightarrow 2\alpha_0 = -22,95^\circ$$

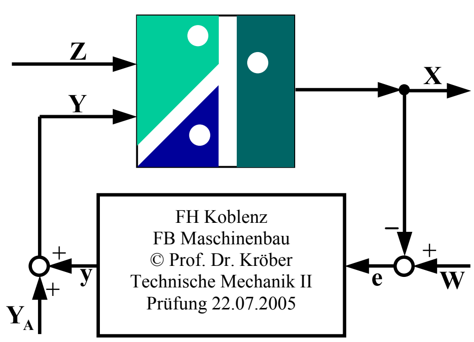
$$\underline{\underline{\alpha_0 = -11,48^\circ}}$$

J_{min}

$$\underline{\underline{i_{min}}} = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{8,345\cdot 10^4\,mm^4}{1200\,mm^2}} = \underline{\underline{8,34\,mm}}$$

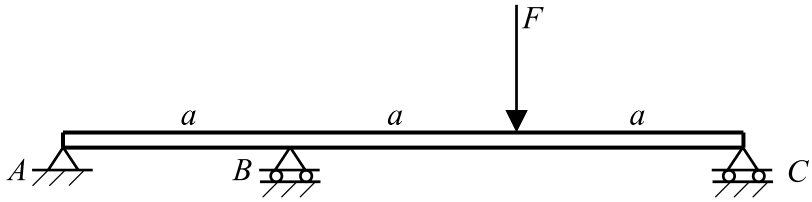
Gesamtfläche $= 900\,mm^2 + 300\,mm^2$



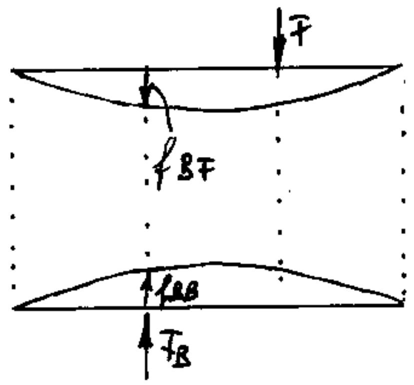


Aufgabe 4 (18P)

Für den abgebildeten Träger sind alle Lagerkräfte zu bestimmen. Als Lösungsmethode ist das Superpositionsprinzip zu wählen.



zunächst so, als ob Lager B nicht vorhanden:



$$f_{BF} = \frac{F(3a)^3}{6EJ}\cdot\frac{2\cancel{a}}{3\cancel{a}}\cdot\left(\frac{\cancel{a}}{3\cancel{a}}\right)^2\frac{\cancel{a}}{3\cancel{a}}\underbrace{\left(1+\frac{3\cancel{a}}{\cancel{a}}-\frac{\cancel{a^2}}{2\cancel{a}\cdot\cancel{a}}\right)}_{7/2}$$

$$= \frac{F\cdot a^3\cdot\cancel{3\cdot3\cdot3\cdot2}}{EJ\cdot6\cdot3\cdot\cancel{3\cdot3\cdot3}}\cdot\frac{7}{\cancel{2}} = \frac{7\cdot Fa^3}{18\cdot E\cdot J}$$

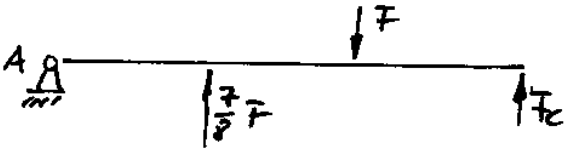
$$f_{BB} = \frac{F_B(3a)^3}{3\cdot E\cdot J}\left(\frac{2a}{3a}\right)^2\left(\frac{a}{3a}\right)^2 = \frac{F_B\cdot a^3\cdot\cancel{3\cdot3\cdot3}\cdot2\cdot2}{E\cdot J\cdot\cancel{3\cdot3\cdot3}\cdot3\cdot3}$$

$$= \frac{4\cdot F_B\cdot a^3}{9\cdot E\cdot J}$$

FH Koblenz
FB Maschinenbau
© Prof. Dr. Kröber
Technische Mechanik II
Prüfung 22.07.2005

$$f_{BF} = f_{BB}$$

$$\frac{7\cdot F\cancel{a^3}}{18\cdot\cancel{EJ}} = \frac{4\cdot F_B\cancel{a^3}}{9\cancel{EJ}} \Rightarrow \underline{\underline{F_B}} = \frac{7\cdot\cancel{9}}{4\cdot\cancel{18}_2}\cdot F = \underline{\underline{\frac{7}{8}\cdot F}}$$

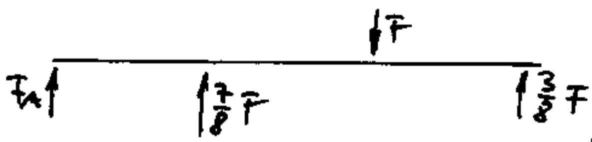


$\curvearrowleft \sum M_A = 0:$

$$-\frac{7}{8}F\cdot a + F\cdot 2a - F_C\cdot 3a = 0$$

$$F_C = \frac{1}{3}\left(2F - \frac{7}{8}F\right)$$

$$\underline{\underline{= \frac{3}{8}\cdot F}}$$



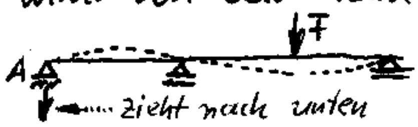
$\uparrow \sum F_y = 0:$

Bem.: $F_{A_x} = 0$

$$F_A + \frac{7}{8}F - F + \frac{3}{8}F = 0$$

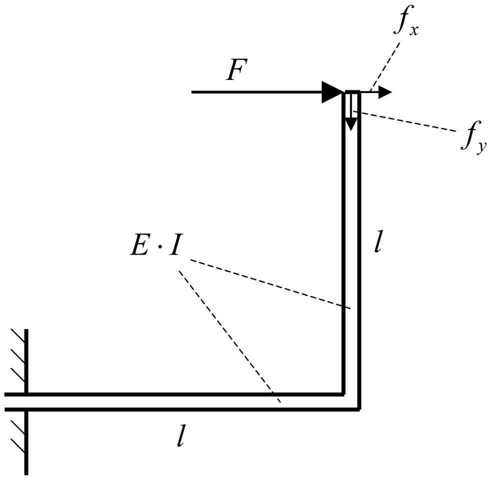
$$\underline{\underline{F_A}} = F - \frac{7}{8}F - \frac{3}{8}F = \underline{\underline{-\frac{1}{4}F}}$$

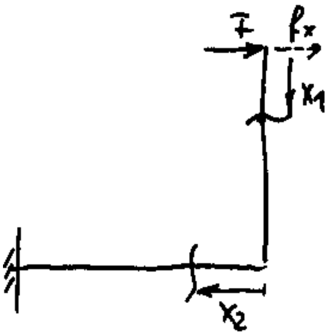
Minuszeichen:
Kraft wirkt von oben nach unten → klar bei Betrachtung der Gesamtbiegelinie



Aufgabe 5 (16P)

Bestimmen Sie die Verschiebungen f_x und f_y des Kraftangriffspunktes! Die Verschiebung f_x ist mit dem Satz von Castigliano zu bestimmen. Die Methode zur Bestimmung von f_y ist freigestellt.





$$W_b = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{(-F x_1)^2}{EJ}\,dx_1 + \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{(-F\ell)^2}{EJ}\,dx_2$$

$$f_x = \frac{\partial W_b}{\partial F} = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\ell} \frac{\cancel{2}(-F x_1)(-x_1)}{EJ}\,dx_1 + \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\ell} \frac{\cancel{2}(-F\ell)(-\ell)}{EJ}\,dx_2$$

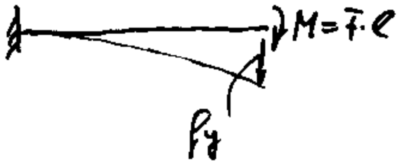
$$= \frac{F}{EJ}\int_0^{\ell} x_1^2\,dx_1 + \frac{F\ell^2}{EJ}\int_0^{\ell} dx_2$$

$$= \frac{F}{EJ}\left[\frac{1}{3}x_1^3\right]_0^{\ell} + \frac{F\ell^2}{EJ}\left[x_2\right]_0^{\ell}$$

$$\underline{\underline{f_x}} = \frac{F}{EJ}\left[\frac{1}{3}\ell^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3\right] + \frac{F\ell^2}{EJ}\left[\ell - 0\right] = \underline{\underline{\frac{4\cdot F\ell^3}{3EJ}}}$$

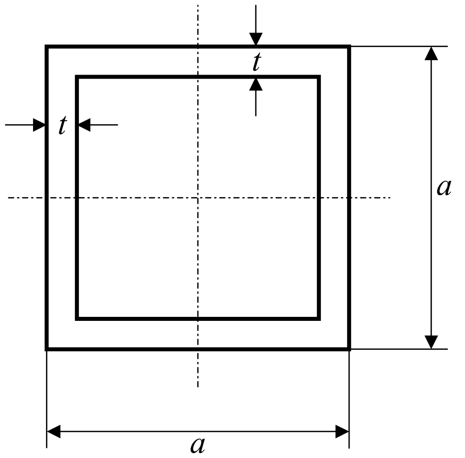
FH Koblenz
FB Maschinenbau
© Prof. Dr. Kröber
Technische Mechanik II
Prüfung 22.07.2005

f_y mit Superposition (Biegelinie):



$$\underline{\underline{f_y}} = \frac{M_b\cdot\ell^2}{2EJ} = \frac{(F\cdot\ell)\cdot\ell^2}{2EJ} = \underline{\underline{\frac{F\ell^3}{2EJ}}}$$

Aufgabe 6 (12P)



In der ehemaligen Schlachthofhalle in Koblenz wurden zur punktuellen Unterstützung der Deckenkonstruktion nachträglich Stahlstützen eingebaut. Die Stahlstützen haben ein von außen sichtbares quadratisches Profil. Die Wandstärke ist unbekannt. Die Stützenanbindung an Decke und Boden kann wie ein Gelenk angesehen werden.
Folgende Daten sind feststellbar bzw. können zugrunde gelegt werden:

Stützenhöhe: h = 7,5 m
Kantenlänge: a = 160 mm
E-Modul: E = 210000 N/mm^2

a. Die Rückfrage bei einem Stahlhändler ergab, dass bei dem Außenmaß von a = 160 mm eine Wandstärke von t = 12 mm ab Lager lieferbar wäre. Bestimmen Sie den Schlankheitsgrad und die Knickkraft für diesen Fall (Knickfall nachweisen)!
b. Nehmen wir einmal es würde sich um Vollmaterial handeln (t=a/2). Wie groß wäre dann der Schlankheitsgrad?
c. Im anderen Extremfall soll untersucht werden, welcher Schlankheitsgrad sich ergibt, wenn die Wandstärke gegen Null geht. Für dünnwandiges quadratisches Vierkantrohr (t<<a) gilt: $I_x = \frac{2}{3} \cdot a^3 \cdot t \qquad A = 4 \cdot a \cdot t$

Bemerkung zu c.: Das Beulen der dünnen Wand soll hier keine Rolle spielen.

zu a) $J = \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{12}(a-2t)^4 = \frac{1}{12}\left[(160\,mm)^4 - (136\,mm)^4\right] = 26{,}105 \cdot 10^6\,mm^4$

$A = a^2 - (a-2t)^2 = (160\,mm)^2 - (136\,mm)^2 = 7104\,mm^2$

$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{26{,}105 \cdot 10^6\,mm^4}{7104\,mm^2}} = 60{,}619\,mm$

$\underline{\underline{\lambda}} = \frac{s_K}{i_{min}} = \frac{\beta \cdot l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 7500\,mm}{60{,}619\,mm} = \underline{\underline{123{,}7 > \lambda_0}}$ ($\beta = 1$; bei St37 oder bei St50/60)

also „Euler-Fall"

$\underline{\underline{F_K}} = \left(\frac{\pi}{s_K}\right)^2 E\, J_{min} = \left(\frac{\pi}{7500\,mm}\right)^2 \cdot 210000\,\frac{N}{mm^2} \cdot 26{,}105 \cdot 10^6\,\frac{N}{mm^2} = \underline{\underline{961{,}9\,kN}}$

b) $\underline{\underline{\lambda}} = \frac{\beta \cdot l}{i_{min}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{J}{A}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{\frac{1}{12}a^4}{a^2}}} = \sqrt{12}\,\frac{l}{a} = \sqrt{12}\,\frac{7500\,mm}{160\,mm} = \underline{\underline{162{,}4}}$ ($\beta = 1$)

c) $\underline{\underline{\lambda}} = \frac{\beta \cdot l}{i_{min}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{\frac{2}{3}a^3 t}{4 a t}}} = \sqrt{6}\,\frac{l}{a} = \sqrt{6}\,\frac{7500\,mm}{160\,mm} = \underline{\underline{114{,}8}}$

Bem.: egal bei welcher Wandstärke → stets elastische Knickung