

Technische Thermodynamik I

Teil I

Prof. Dr.-Ing. W. Nieratschker

1. Allgemeine Grundlagen	5
1.1. Definition und historische Entwicklung	5
1.2. Einordnung in das Studium	6
1.2.1. Kraft- und Arbeitsmaschinen	6
1.2.1.1. Kraftmaschinen	6
1.2.1.2. Arbeitsmaschinen	6
1.2.2. Heiz- und Kühlaggregate	6
1.2.3. Chemische Prozesse	6
1.3. Grundbegriffe	8
1.3.1. Thermodynamische Systeme	8
1.3.2. Zustand eines Systems, thermodynamischer Gleichgewichtszustand	10
1.3.3. Klassifizierung von Zustandsgrößen	12
1.3.3.1. Intensive und extensive Größen	12
1.3.3.2. Spezifische Zustandsgrößen	13
1.3.3.3. Molare Zustandsgrößen	13
1.3.3.4. Umrechnung extensiver Zustandsgrößen auf spezifische oder molare Größen	14
1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T	15
1.4.1. Das Volumen V [m³]	15
1.4.2. Der Druck p	15

1.4.3. Die Temperatur T und das thermische Gleichgewicht	17
1.4.3.1. Häufige Temperaturmeßverfahren	18
1.5. Die thermische Zustandsgleichung	22
1.5.1. Thermische Zustandsgleichung für ideale Gase	22
1.5.2. Die thermische Zustandsgleichung für molare Größen	23
1.5.3. Normzustand	24
1.5.4. Graphische Veranschaulichung der thermischen Zustandsgleichung	25
1.5.5. Thermische Zustandsgleichung im p,V,T-Raum für beliebige Stoffe	25
1.5.6. Thermische Zustandsgleichung im p,V,T-Raum des idealen Gases	26
1.5.7. Isobare, Isochore und Isotherme Zustandsänderungen als Sonderfälle beliebiger Zustandsänderungen	26
1.5.7.1. Isobare Zustandsänderung	26
1.5.7.2. Isochore Zustandsänderung	27
1.5.7.3. Isotherme Zustandsänderung	27
1.6. Reversible und irreversible Prozesse	29
1.7. Die Prozessgrößen Arbeit W und Wärme Q	30
1.7.1. Volumenänderungsarbeit	30
1.7.2. Technische Arbeit W_t	31
1.8. Die Wärme	33
1.8.1. Die spezifischen Wärmekapazitäten	34
1.9. Aufgaben	36

2. Energieerhaltungssatz und Energieinhalt thermodynamischer Systeme	41
2.1. Innere Energie	41
2.2. Gleichwertigkeit von Wärme und Arbeit	43
2.3. Erster Hauptsatz: Mathematische Form für ruhende geschlossene Systeme (Form I)	45
2.4. Die kalorische Zustandsgleichung	46
2.4.1. Der Gay-Lussacsche Überstromversuch für ideale Gase	47
2.5. Die Enthalpie und erster Hauptsatz	51
2.6. Die kalorische Zustandsgleichung (Form II)	53
2.7. Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität	54
2.8. Zusammenhang zwischen c_p , c_v und R für ideale Gase	57
2.9. Berechnung der Änderung der Enthalpie und Änderung der inneren Energie	58
2.10. Adiabate Systeme	60
2.11. Die polytrope Zustandsänderung	64
2.12. Aufgaben	71
3. Mischungen idealer Gase	77
3.1. Zusammensetzung der Gasgemische	77
3.1.1. Massenspezifische Zusammensetzung	77
3.1.2. Molare Zusammensetzung	78

3.1.3. Volumenspezifische Zusammensetzung	78
3.2. Thermische Zustandsgleichung idealer Gasmischungen	79
3.2.1. Die mittlere Dichte ρ_m einer idealen Gasmischung	80
3.2.2. Die mittlere Molare Masse M_m	81
3.2.3. Die Gaskonstante R_m der idealen Gasgleichung	81
3.2.4. Zusammenhang zwischen Massen- und Raumanteilen	82
3.3. Kalorische Zustandsgrößen der idealen Gasmischung	83
3.4. Aufgaben	87

1.1. Definition und historische Entwicklung

1. Allgemeine Grundlagen

1.1. Definition und historische Entwicklung

Teilgebiet der Physik := allgemeine Energielehre

therme		dynamis
Wärme		Kraft, Bewegung
Wärme	→	Nutzarbeit
Thermische Energie	→	mechanische Arbeit
Lehre der Energiewandlung		

Begründer: N. L. Sadi Carnot (1796 – 1832) mit der einzigen Veröffentlichung 1824:

„Réflexions sur la puissance motrice de feu et sur les machines propres à développer cette puissance“

Carnot abstrahiert darin aus bekannten Maschinenkonstruktionen die „vollkommene Maschine“ und als allgemein gültiges Naturgesetz den **2. Hauptsatz der Thermodynamik**.

1845 Julius Robert Meyer formuliert erstmals die Äquivalenz von Wärme und Arbeit

Wärme \Leftrightarrow Arbeit

=> Energieerhaltungssatz: $\sum E = \text{const.}$ (**1. Hauptsatz der Thermodynamik**)

1850 R.J. Emanuel Clausius formulierte erstmals den ersten und den zweiten Hauptsatzes quantitativ.

1.2. Einordnung in das Studium

1.2. Einordnung in das Studium

Grundlage für z. B. folgende Fachdisziplinen:

1.2.1. Kraft- und Arbeitsmaschinen

1.2.1.1. Kraftmaschinen

(mechanische Arbeit wird von den Maschinen abgegeben)

- Dampfmaschinen MK / ME
- Verbrennungskraftmaschinen
 - Ottomotoren MK
 - Dieselmotoren MK / ME
- Turbinenstrahltriebwerke ME / MK
- Kraftwerke
 - Dampfkraftprozesse ME
 - Gasturbinenprozesse ME

1.2.1.2. Arbeitsmaschinen

(mechanische Arbeit wird von den Maschinen aufgenommen)

- Pumpen ME / MK
- Verdichter ME / MK
- Kältemaschinen ME
- Wärmepumpen ME

1.2.2. Heiz- und Kühlaggregate

- Verflüssigung von Gasen (Luft, Stickstoff, Wasserstoff, Helium) ME
- Heizkraftwerke (Fernwärme) MK

1.2.3. Chemische Prozesse

1.2. Einordnung in das Studium

Ziele der Thermodynamik:

Erziehung zum „Energiewirtschaftlichen Handeln“ durch:

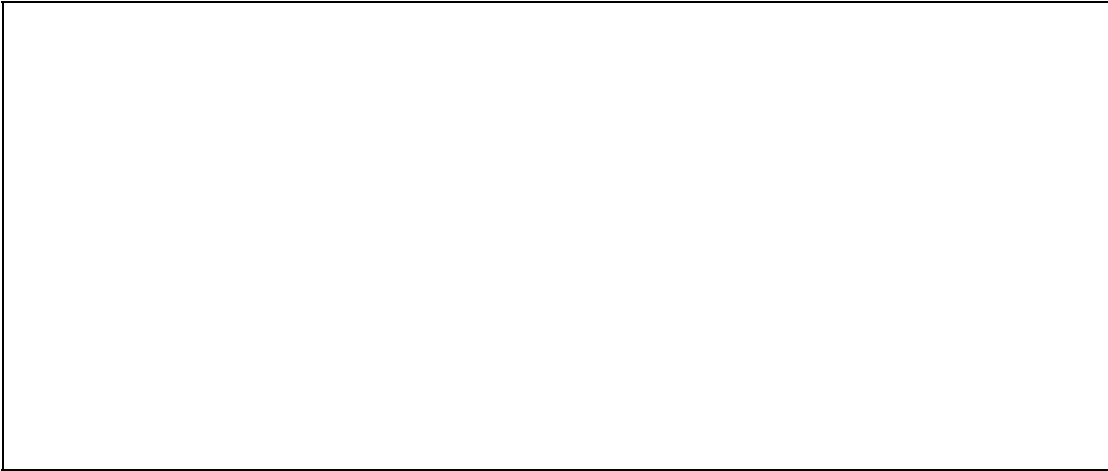
1. Bereitstellung der Naturgesetze der Energiewandlung
2. Untersuchung der für die Energiewandlung wesentlichen Eigenschaften der Materie im gasförmigen, festen und flüssigen Zustand
3. Anwendung der Gesetze auf technische Prozesse.

Die klassische Thermodynamik beschreibt verschiedene zeitlich konstante Zustände und nicht zeitlich veränderliche Vorgänge.

1.3. Grundbegriffe

1.3. Grundbegriffe

1.3.1. Thermodynamische Systeme



Teil eines Gases als System



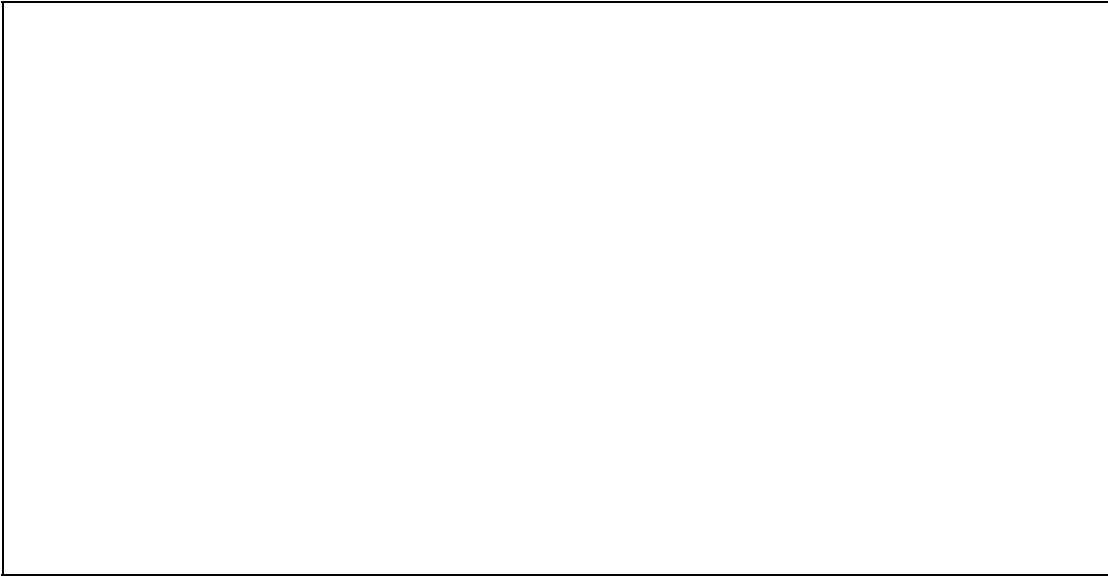
Gas in einer Gasflasche (sinnvolle Systemgrenze = Behälterwandung)

Def.: Thermodynamisches System = Kontrollraum (Bezugsraum), worauf sich die Untersuchung bezieht.

Geschlossene Systeme: Systemgrenzen sind für Materie undurchlässig oder massedicht. Nur Energie kann zwischen System und Umgebung übertragen werden.

Offene Systeme: Systemgrenzen sind für Materie durchlässig. Mindestens ein Stoffstrom schneidet die Systemgrenze. Sowohl Stoff- als auch Energieübertragung ist möglich.

1.3. Grundbegriffe

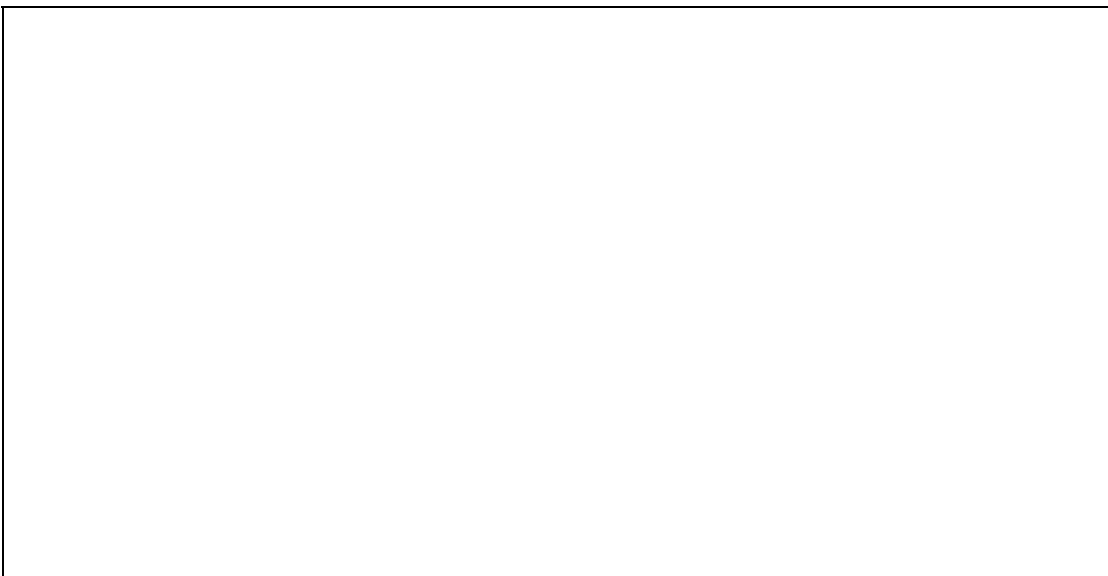


Dampfturbine als thermodynamisches System

Abgeschlossenes System: Systemgrenze verhindert jede Wechselwirkung mit der Umgebung.

Homogene Systeme: physikalische und chemische Eigenschaften im System sind überall gleich → Einphasensystem.

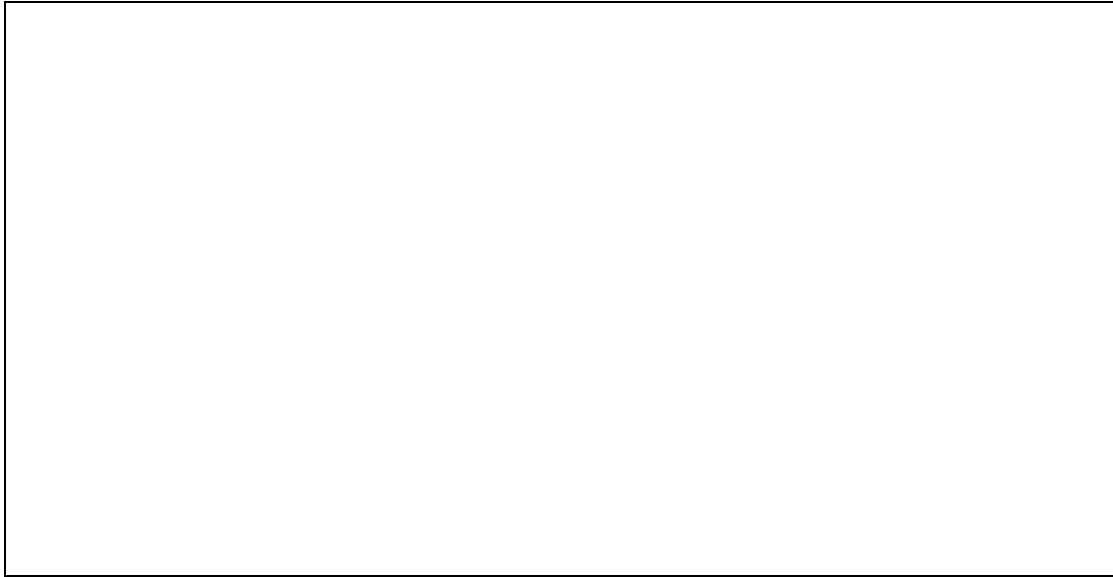
Heterogene Systeme: physikalische und chemische Eigenschaften sind im System nicht überall gleich. Jeden homogenen Bereich im System bezeichnet man als Phase → Mehrphasensystem.



Heterogenes System

1.3. Grundbegriffe

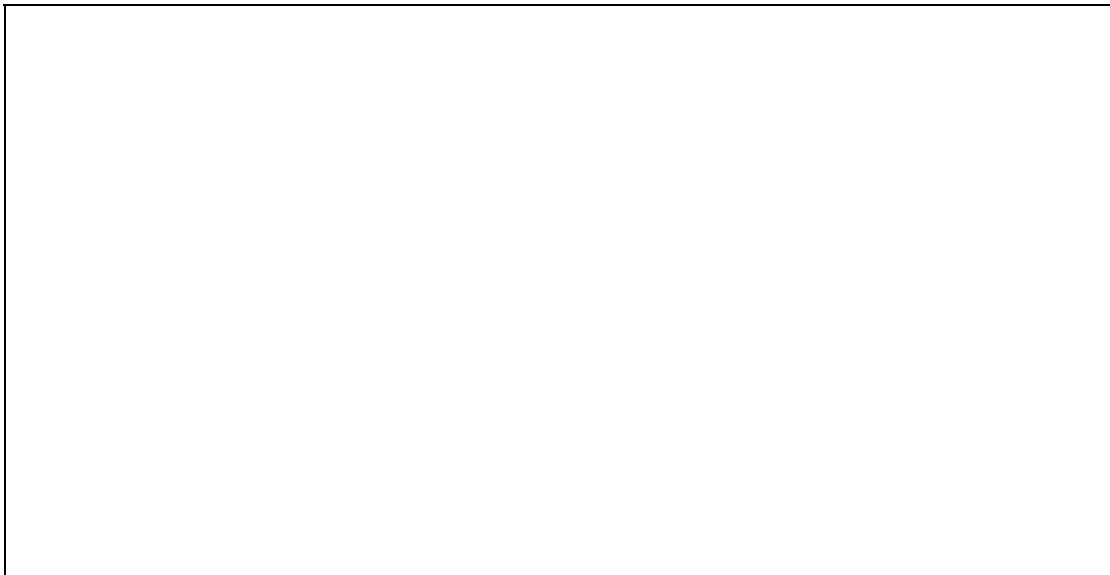
1.3.2. Zustand eines Systems, thermodynamischer Gleichgewichtszustand



Autoreifen: Beschreibung durch Druck und Temperatur

Die Klassische Thermodynamik betrachtet die makroskopischen Eigenschaften jedes Systems wie z.B. das Volumen V , den Druck p , die Dichte ρ , die Temperatur T , die Stoffmenge n , innere Energie u .

Makroskopische Eigenschaften, die ein System eindeutig beschreiben heißen Zustandsgrößen.



Autoreifen: Störung des Gleichgewichtszustandes

Empirische Beobachtung:

Störung: p , T sind vorübergehend zeitlich und örtlich nicht konstant.

1.3. Grundbegriffe

Nach Abklingen der Störung: Zustandsgrößen Druck p und Temperatur T beschreiben das System wieder eindeutig.



Zustandsänderung

Übergang von einem Gleichgewichtszustand in einen anderen Gleichgewichtszustand.

Prozess

Eine Folge von Zustandsänderungen.



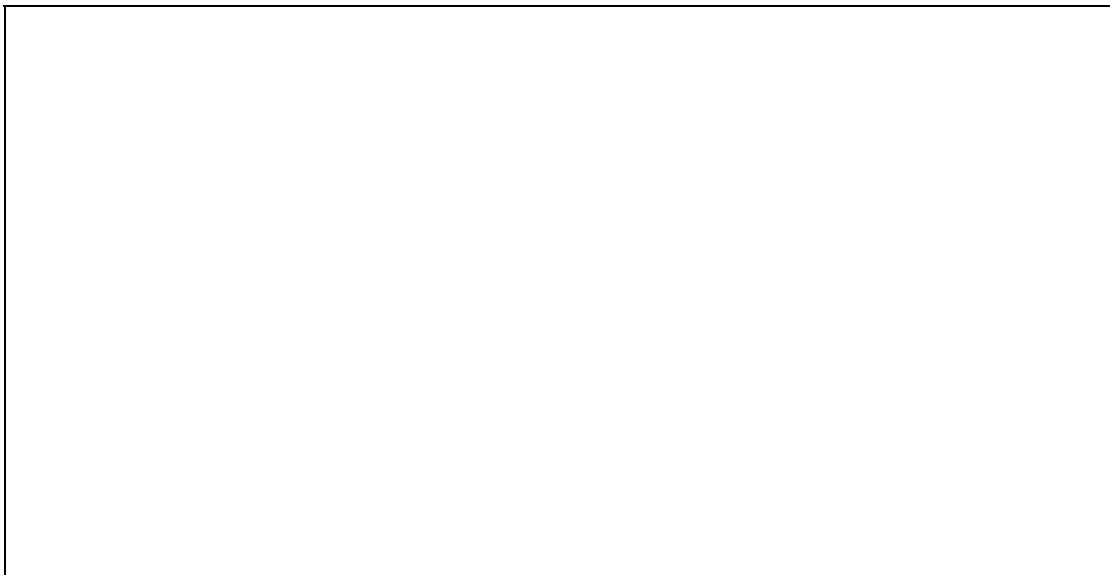
1.3. Grundbegriffe



Quasistatische Zustandsänderungen:= Das thermodynamische Gleichgewicht kann sich nach jeder kleinen Veränderung einstellen.

1.3.3. Klassifizierung von Zustandsgrößen

1.3.3.1. Intensive und extensive Größen



Homogenes System

1.3. Grundbegriffe

Intensive Zustandsgrößen wie der Druck p und die Temperatur T ändern ihren Wert bei der Teilung nicht.

Extensive Zustandsgrößen: wie die Masse m und das Volumen V ändern ihren Wert bei der Teilung.

$$\text{Es gilt:} \quad m = m_I + m_{II}$$

$$V = V_I + V_{II}$$

1.3.3.2. Spezifische Zustandsgrößen

$$\text{spez. Volumen:} \quad v = \frac{V}{m} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \quad (1.1)$$

spezifische Zustandsgrößen behalten bei der Teilung eines homogenen Systems ihren Wert (wie intensive Zustandsgrößen).

1.3.3.3. Molare Zustandsgrößen

$$\text{molares Volumen:} \quad \bar{v} = \frac{V}{n} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right] \quad (1.2)$$

mit $n = 1 \text{ kmol} = 1000 \text{ mol} = 6,022045 \cdot 10^{26}$ Atome oder Moleküle

Bsp.:	He	bedeutet	1 mol Helium	= $6 \cdot 10^{23}$ HeliumAtome
	HCl	bedeutet	1 mol HCl	= $6 \cdot 10^{23}$ HCl-Moleküle
	H ₂	bedeutet	1 mol H ₂	= $6 \cdot 10^{23}$ H ₂ -Moleküle

Die Masse ist der Teilchenmenge proportional:

$$m = n \cdot M \quad (1.3)$$

$$M := \text{molareMasse} \left[\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right]$$

1.3. Grundbegriffe

Bsp: $M_{\text{He}} = 4,003 \left[\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right]$

$$M_{\text{CH}_4} = 16,04 \left[\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right]$$

1.3.3.4. Umrechnung extensiver Zustandsgrößen auf spezifische oder molare Größen

geg. Zustandsgröße Z :

$$z = \frac{Z}{m} = \frac{Z}{M \cdot n} = \frac{\bar{z}}{M} \quad (1.4)$$

oder $\bar{z} = M \cdot z$

z.B.: $\bar{v} = M \cdot v$

1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T

1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T

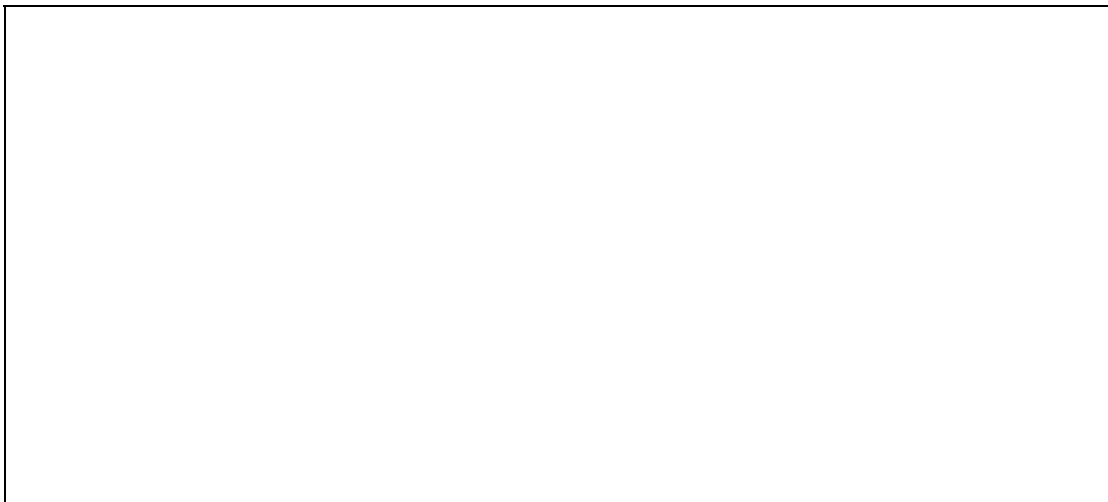
1.4.1. Das Volumen V [m³]

spez. Volumen $v = \frac{V}{m} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$ (1.5)

molares Volumen $\bar{v} = \frac{V}{n} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right]$ (1.6)

Dichte $\rho = \frac{m}{V} = \frac{1}{v} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ (1.7)

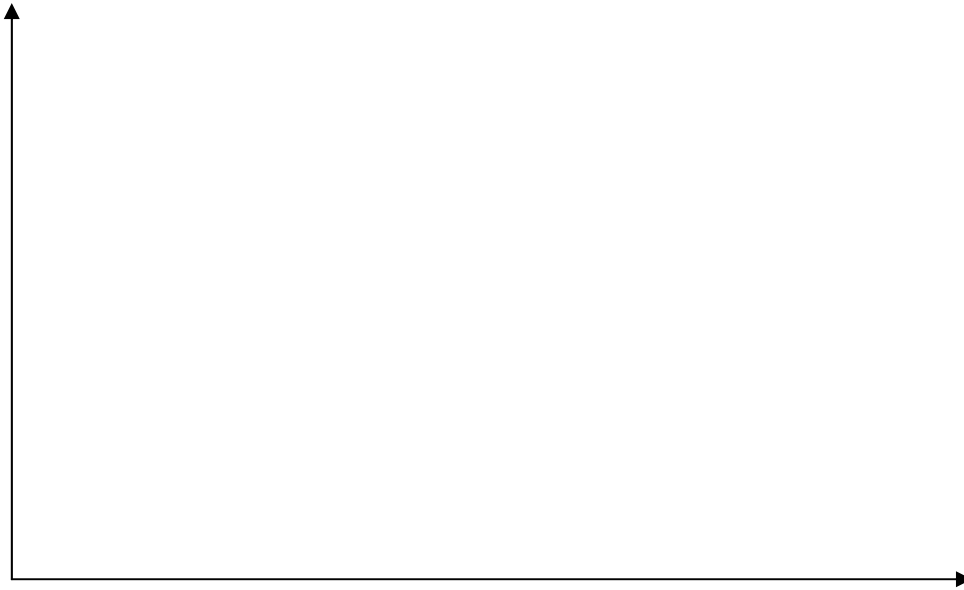
1.4.2. Der Druck p



Gasdruck := Impulsänderungen der Moleküle an den Wänden

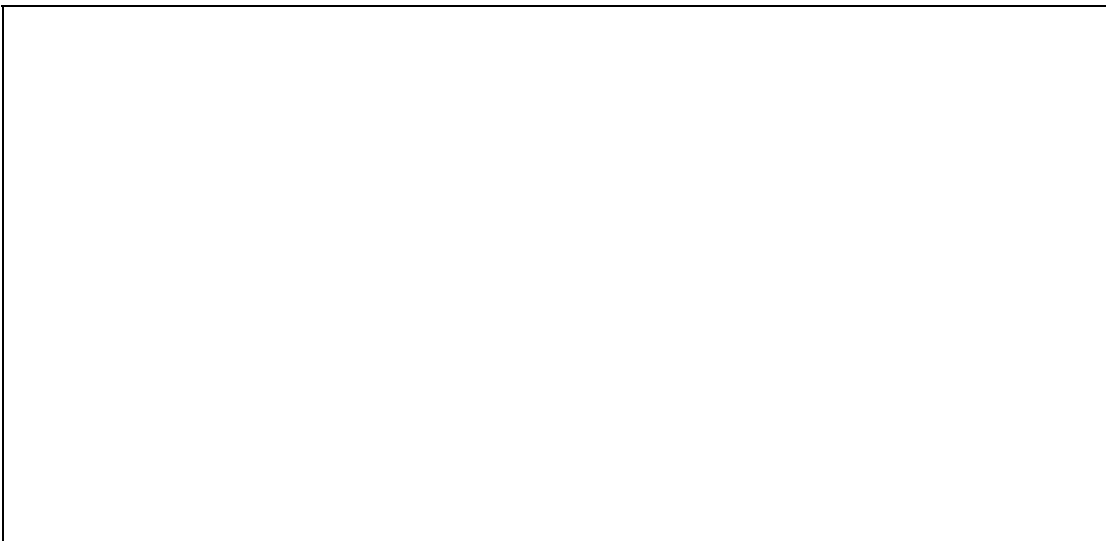
Def.: Druck p = $\frac{\text{Normalkraft F}}{\text{Fläche A}}$ mit $F \perp A$ (1.8)

1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T



Einzig maßgeblich für Thermodynamik: absoluter Druck $p \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

Daneben existieren der barometrische Druck p_b und der Differenzdruck p_D



System: hier gespeichertes Gas unter Druck p

Umgebungsdruck p_B

$$p = p_B + p_D$$

$$p_D = \frac{F_G}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{A} = \frac{A \cdot h \cdot \rho \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$

$$p = p_B + \rho \cdot g \cdot h$$

(1.9)

1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T

Druckmeßgeräte:

- 1) Flüssigkeitsmanometer zum Messen von Überdrücken
- 2) Röhrenfedermanometer
- 3) Membranfeder
- 4) Piezoquarz

$$1 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = 1 [\text{Pa}] (\text{Pascal}) = 1 \left[\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} \right] \quad (1.10)$$

Häufig: $1 [\text{bar}] = 10^5 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = 10^5 [\text{Pa}]$

Umrechnung: $1 [\text{Pa}] = 7,501 \cdot 10^{-3} [\text{Torr}] \quad 1 [\text{bar}] = 1,01325 [\text{atm}]$

1.4.3. Die Temperatur T und das thermische Gleichgewicht



Annahme: Systeme A und B sind geschlossen und homogen, es existiert kein Energieaustausch mit der Umgebung!

Ausgangszustand: $T_A > T_B$

1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T

Beobachtung: p_A und p_B , T_A und T_B ändern sich, bis $T_A = T_B$ (thermisches Gleichgewicht)

Nullter Hauptsatz: Zwei Systeme stehen dann im thermischen Gleichgewicht, wenn sie die gleiche Temperatur haben.

Absolute Temperatur: Einheit Kelvin [K]

Temperatur-Fixpunkte für $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$:

Siedepunkt von Wasser	$373,15 [\text{K}] \hat{=} 100 [^\circ\text{C}]$
Tripelpunkt von Wasser	$273,16 [\text{K}] \hat{=} 0,01 [^\circ\text{C}]$
Absoluter Nullpunkt	$0 [\text{K}] \hat{=} -273,15 [^\circ\text{C}]$

Umrechnung von $[^\circ\text{C}]$ in [K]: $T[\text{K}] = t[^\circ\text{C}] + 273,15$

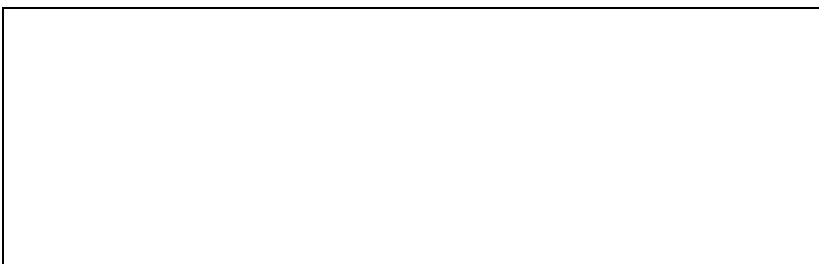
1.4.3.1. Häufige Temperaturmeßverfahren

1. Flüssigkeitsthermometer:



Wärmeausdehnung von Flüssigkeiten $V = V(T)$

2. Thermoelemente (siehe Umdruck)



1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T

3. Widerstandsthermometer $R = f(T)$
4. Gasthermometer als Eichgeräte $T = T(p, V)$
5. Chemische Reaktionen (Farbänderungen)
6. Strahlungspyrometer

Δt : Temperaturunterschied
 $\Delta t = t_2 - t_1$
 $\Delta T = T_2 - T_1$
 $\Delta t = \Delta T$ [K] Differenzangabe immer in Kelvin

T_F = Temperatur Fahrenheit

Umrechnung $T_F \rightarrow t$

$$\frac{t}{100} = \frac{T_F - 32}{180}$$

1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T

Übungsaufgabe 1:

geg: $V = 10 \text{ [m}^3\text{]}; m = 8 \text{ [kg] N}_2$

ges.: a) ρ b) v c) \bar{v}

zu a)
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{8}{10} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] = 0,8 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

zu b)
$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} = 1,25 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$$

zu c)
$$\bar{v} = \frac{V}{n} \quad \text{mit } n = \frac{m}{M}$$

$$M_{\text{N}_2} = 28,01 \left[\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right] \quad (\text{aus Tafel 1.3})$$

$$n = \frac{8}{28,01} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{kmol}}{\text{kg}} \right] = 0,29 \text{ kmol}$$

$$\bar{v} = \frac{10}{0,29} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right] = 34,5 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right]$$

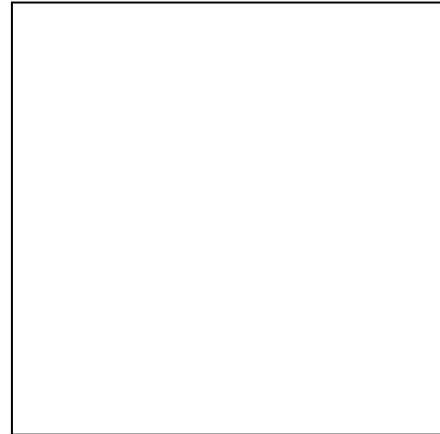
1.4. Die thermischen Zustandsgrößen Volumen V, Druck p und Temperatur T

Übungsaufgabe 2:

geg.: $V = 50 \text{ [m}^3\text{]}$, $h = 4 \text{ [m]}$, $m_{\text{Luft}} = 72 \text{ [kg]}$, $p_{\text{ü}} = 2,26 \cdot 10^4 \text{ [Pa]}$,

$$p_{\text{Barometer}} = 10^5 \text{ [Pa]}, \rho_{\text{Wasser}} = 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

ges.: a) p_{Decke} , b) p_{Boden} , c) Δp_{Wasser}



$$\text{a) } p_{\text{Decke}} = p_{\text{B}} + p_{\text{ü}} = \left(10^5 + 2,26 \cdot 10^4 \right) \text{ [Pa]} = 1,226 \cdot 10^5 \text{ [Pa]} \approx 1,23 \text{ [bar]}$$

$$\text{b) } p_{\text{Boden}} = p_{\text{Decke}} + \rho_{\text{L}} \cdot g \cdot h$$

$$\rho_{\text{L}} = \frac{m}{V} = \frac{72}{50} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] = 1,44 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$p_{\text{Boden}} = 1,23 \cdot 10^5 \text{ [Pa]} + 1,44 \cdot 9,81 \cdot 4 \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2} \right] =$$

$$= 1,23 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] + 56,5 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = 1,23 \text{ [bar]} + 0,000565 \text{ [bar]} \approx 1,23 \text{ [bar]}$$

$$\text{c) } p_{\text{Boden}} = p_{\text{Decke}} + \rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot h$$

$$\Delta p = p_{\text{Boden}} - p_{\text{Decke}} = \rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot h$$

$$\Delta p = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 4 \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2} \right]$$

$$\Delta p = 0,392 \text{ bar}$$

1.5. Die thermische Zustandsgleichung

1.5. Die thermische Zustandsgleichung

Erfahrungssatz: Ein homogenes, isotropes System mit konstanter Masse wird durch zwei Zustandsgrößen eindeutig beschrieben.

$$T = f_1(p, V)$$

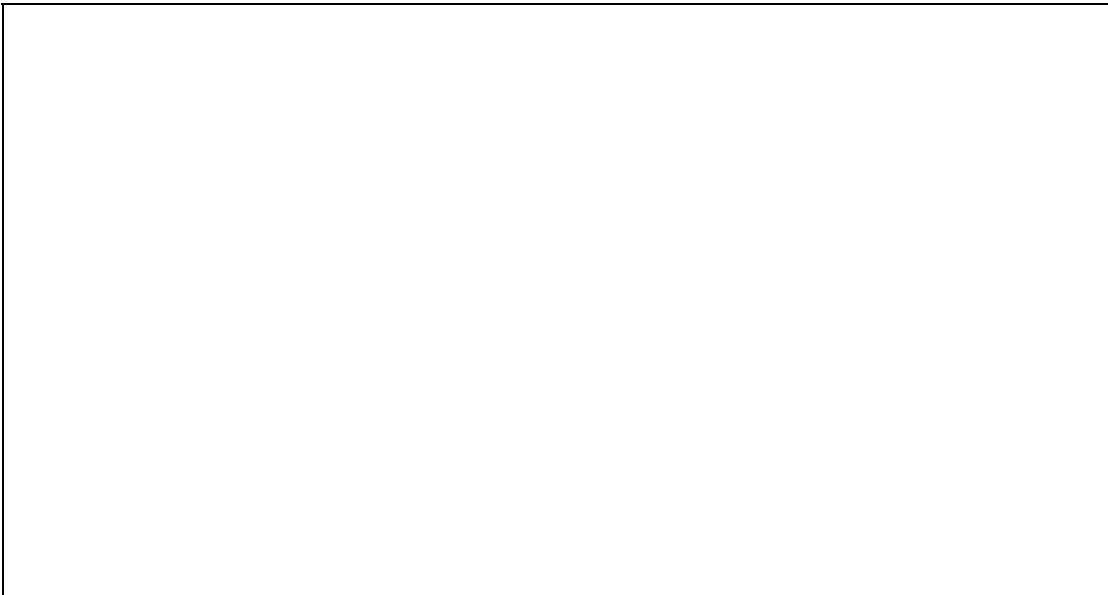
$$p = f_2(T, V)$$

$$V = f_3(p, T)$$

Umgeformt: $T - f_1(p, V) = 0$

Thermische Zustandsgleichung: $F(p, V, T) = 0$

1.5.1. Thermische Zustandsgleichung für ideale Gase



$$V = f(p, T)$$

1.5. Die thermische Zustandsgleichung

Für ein ideales Gas gilt: $p \cdot V = \text{const} \cdot m \cdot T$ (1.11)

$$R = \frac{p \cdot V}{m \cdot T} \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \text{ stoffspezifische Gaskonstante}$$

Gültigkeitsbereich bei Gasen: $T > 200 \text{ K}$, $p < 20 \text{ bar}$

für Luft: $R_L = 287,1 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$

$$p \cdot v = R \cdot T$$

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

Ideales Gas: $\frac{p \cdot v}{R \cdot T} = 1$

Reales Gas: $\frac{p \cdot v}{R \cdot T} = Z$ mit $Z \neq 1$

$$Z = f(\text{Gasart}, p, T)$$

1.5.2. Die thermische Zustandsgleichung für molare Größen

$$m = n \cdot M$$

$$p \cdot V = n \cdot M \cdot R \cdot T \quad | : n$$

1 kmol verschiedener Gase nehmen bei gleichen Randbedingungen (p , T) das gleiche Volumen ein

$$\left(22,4 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right] \right)$$

$$p \cdot \bar{v} = M \cdot R \cdot T$$

$$\bar{R} = M \cdot R \rightarrow p \cdot \bar{v} = \bar{R} \cdot T \quad (1.12)$$

\bar{R} = die Gaskonstante bezogen auf 1 kmol = molare Gaskonstante = universelle Gaskonstante für ideale Gase

$$\bar{R} = 8,314 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right]$$

1.5. Die thermische Zustandsgleichung

Bsp. Reifen:

geg.: Zustand 1: $p_1 = 2,5$ [bar], $t_1 = 20$ [°C]

Zustand 2: $t_2 = 60$ [°C]

ges.: p_2

$$(1) \quad p_1 \cdot V_1 = m_1 \cdot R \cdot T_1$$

$$(3) \quad V_1 = V_2 = V$$

$$(2) \quad p_2 \cdot V_2 = m_2 \cdot R \cdot T_2$$

$$(4) \quad m_1 = m_2 = m$$

$$\frac{(2)}{(1)} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = p_1 \cdot \frac{(t_2 + 273,15) [\text{K}]}{(t_1 + 273,15) [\text{K}]} = 2,5 \cdot \frac{(60 + 273,15)}{(20 + 273,15)} = 2,84 \text{ [bar]}$$

1.5.3. Normzustand

$$V = \frac{m \cdot R \cdot T}{p} \quad (1.12)$$

Normkubikmeter:

$$V_n = 1 \text{ [m}^3\text{]}$$

Normzustand:

$$p_n = 1,013 \text{ [bar]}$$

$$T_n = 273,15 \text{ [K]}$$

Molvolumen im Normzustand:

$$\bar{v}_n = 22,4 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right]$$

Bsp.: Berechnung molarer Gaskonstante für O₂

$$p \cdot \bar{v}_n = \bar{R} \cdot T_n$$

Normzustand:

$$p_n \cdot \bar{v}_n = \bar{R} \cdot T_n$$

$$\bar{R} = \frac{p_n \cdot \bar{v}_n}{T_n}$$

$$\bar{R} = \frac{1,013 \cdot 22,4}{273,15} \left[\frac{10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^3}{\text{m}^2 \cdot \text{kmol} \cdot \text{K}} \right]$$

$$\bar{R} = 8,314 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right]$$

1.5. Die thermische Zustandsgleichung

1.5.4. Graphische Veranschaulichung der thermischen Zustandsgleichung

1.5.5. Thermische Zustandsgleichung im p,V,T-Raum für beliebige Stoffe

Ausgangspunkt $p = f(V, T)$

graphisch: Fläche im p,V,T-Raum

Jedem Punkt auf der Fläche entspricht ein möglicher Gleichgewichtszustand des Systems

graphische Darstellung einer Fläche $p = f(V, T)$



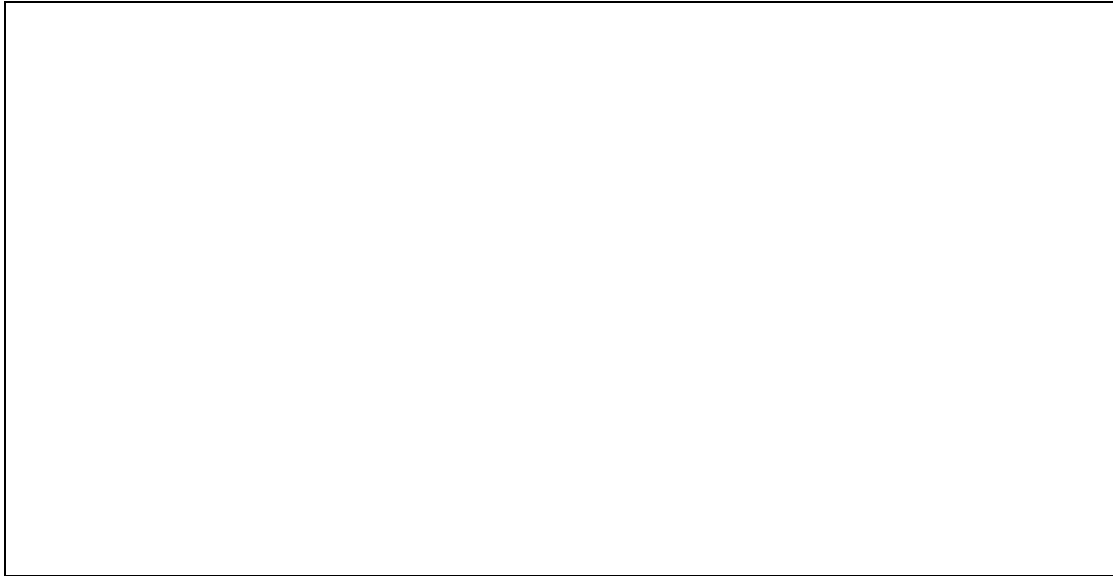
1.5. Die thermische Zustandsgleichung

1.5.6. Thermische Zustandsgleichung im p,V,T-Raum des idealen Gases

1.5.7. Isobare, Isochore und Isotherme Zustandsänderungen als Sonderfälle beliebiger Zustandsänderungen

1.5.7.1. Isobare Zustandsänderung

$$p = \text{const.}$$



thermische Zustandsgleichung

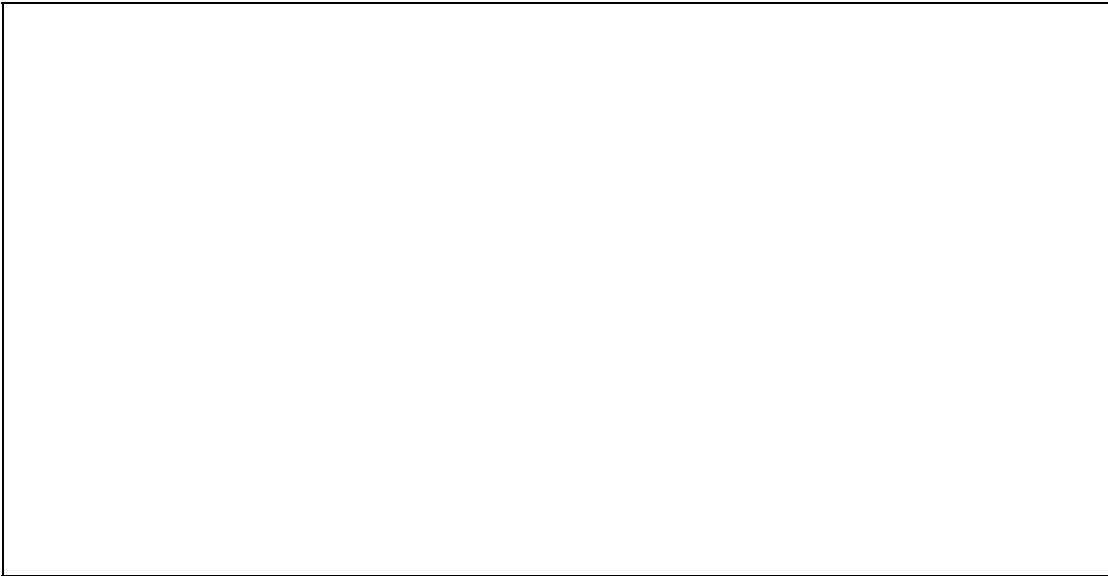
$$p \cdot v = c \cdot T$$

vereinfacht sich zu

$$v = c_1 \cdot T$$

1.5. Die thermische Zustandsgleichung

1.5.7.2. Isochore Zustandsänderung



$$v = \frac{1}{\rho} = \text{const.}$$

vereinfachte Zustandsgleichung $p = c_2 \cdot T$

1.5.7.3. Isotherme Zustandsänderung

$$T = \text{const.}$$

Vereinfachte Zustandsgleichung: $p = \frac{c_3}{v}$

Darstellung in der p-V-Ebene:



1.5. Die thermische Zustandsgleichung

Isobare

Isochore

Isotherme

Isobare Zustandsänderung 1-2

$$(1) \quad p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$$

$$(2) \quad p_2 \cdot v_2 = R \cdot T_2$$

$$(3) \quad p_1 = p_2 = p$$

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{v_1}{T_1} = \frac{T_1}{T_1} \\ (2) \quad \frac{v_2}{T_2} = \frac{T_1}{T_2} \end{array} \quad \text{oder} \quad \frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2};$$

$$\frac{v}{T} = \text{const.} \quad (\text{Gay-Lussac})$$

Isotherme Zustandsänderung 1-2

$$(1) = (2) \quad p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$$

$$p \cdot v = \text{const.} \quad (\text{Boyle-Mariotte})$$

1.6. Reversible und irreversible Prozesse

1.6. Reversible und irreversible Prozesse

reversibel = umkehrbar irreversibel = nicht umkehrbar

ohne bleibende Änderungen in der Umgebung

reversible Prozesse = Idealfälle

irreversible Prozesse: Druckausgleich
Temperatenausgleich
Reibungsvorgänge

Bsp.:



Z1: $p_{11} = p$ (Gas)

$P_{111} = 0$ (Vakuum)

Z2: $p_{12} = p_{112} < p_{11}$

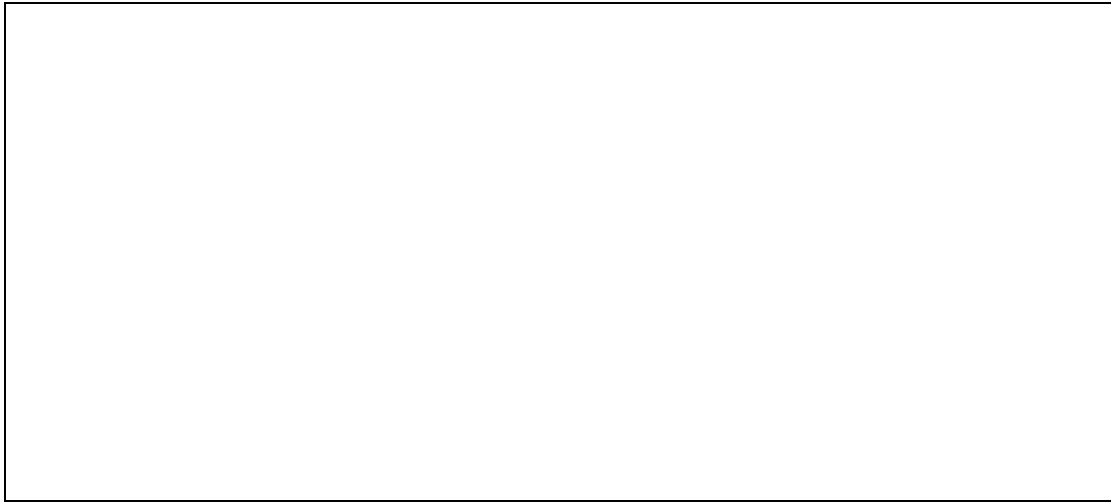
Z3: Zufuhr von Energie aus Umgebung



1.7. Die Prozessgrößen Arbeit W und Wärme Q

1.7. Die Prozessgrößen Arbeit W und Wärme Q

1.7.1. Volumenänderungsarbeit



Systemegoistischer Standpunkt:

$W > 0$ zugeführte Arbeit

$W < 0$ abgegebene Arbeit

(1) $dW = -F dx$

(2) $F = p \cdot A$

$$dW = -p \cdot A \cdot dx$$

$$dW = -p \cdot dV$$

$$W_{12} = -\int_1^2 p dV \quad | \cdot \frac{1}{m}$$

$$w_{12} = -\int_1^2 p dv$$

(1.13)

Bsp.:

geg.: $p_1 = 5 \text{ [bar]} = \text{const.}$, $V_1 = 1 \text{ [m}^3\text{]}$, $V_2 = 4V_1$

ges.: W_{12}

$$W_{12} = -\int_1^2 p(V) dV$$

$$p(V) = \text{const.}$$

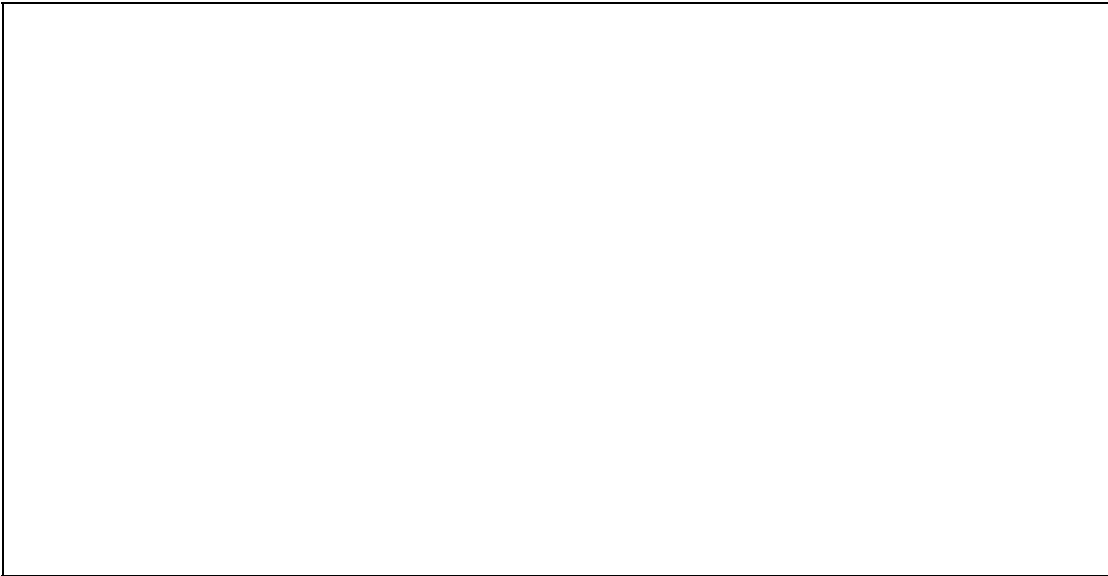
$$W_{12} = -p \cdot \int_1^2 dV$$

$$W_{12} = -p \cdot [V_2 - V_1] = -p \cdot [4 \cdot V_1 - V_1] = -3 \cdot p \cdot V_1 = -3 \cdot 5 \cdot 1 \left[\frac{10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^3}{\text{m}^2} \right]$$

$$W_{12} = -15 \cdot 10^5 \text{ [J]} = -1,5 \cdot 10^6 \text{ [J]} = -1,5 \text{ [MJ]}$$

1.7. Die Prozessgrößen Arbeit W und Wärme Q

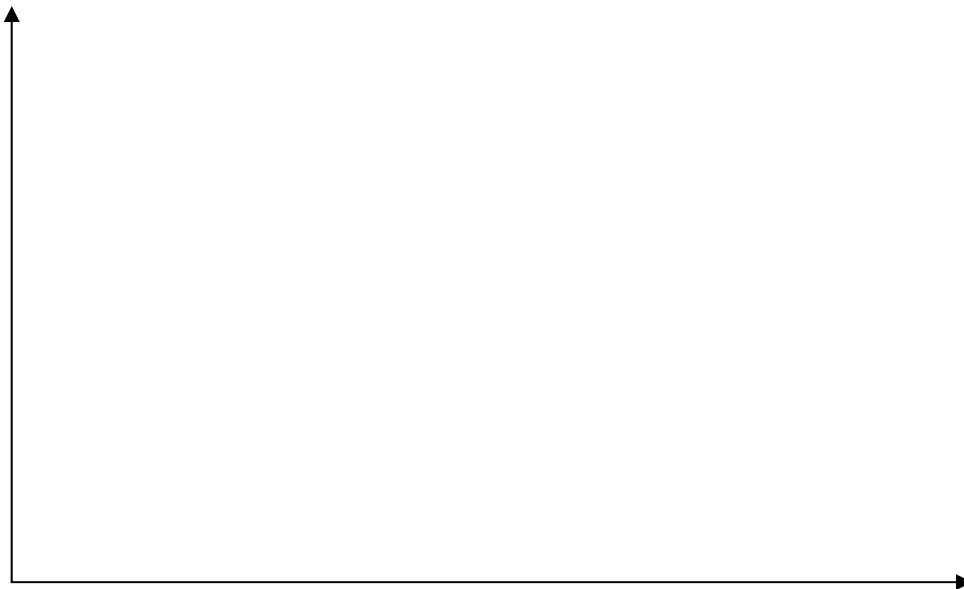
1.7.2. Technische Arbeit W_t



W_t := kontinuierlich zu – oder abgeführte Wellenarbeit

Annahme: $\dot{m}_1 = -\dot{m}_2 = \text{const.}$ (stationärer Fließprozess)

$$P_{12} = \dot{m} \cdot w_{t12}$$



1.7. Die Prozessgrößen Arbeit W und Wärme Q

Graphische Darstellung des Arbeitsspieles im p-V-Diagramm:

$$\begin{aligned}p_1 \cdot A \cdot l_1 &= p_1 \cdot V_1 \\w_{12} &= -\int_1^2 p \, dv \\p_2 \cdot A \cdot l_2 &= p_2 \cdot V_2 \\W_{t12} &= W_{12} + p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V \\W_{t12} &= \int_1^2 V \, dp\end{aligned}\tag{1.14}$$

Bsp.:

geg.: Wasser, $t_1 = 10[^\circ\text{C}]$, $p_1 = 1,013 [\text{bar}]$, $p_2 = 100 [\text{bar}]$

ges.: W_{t12}

$$\text{Lsg.: } W_{t12} = \int_1^2 v(p) \, dp$$

Annahme: Wasser ist inkompressibel

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\rho} = \text{const.} = \frac{1}{10^3} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$$

$$w_{t12} = v \cdot [p_2 - p_1] = 10^{-3} \cdot (100 - 1,013) \cdot 10^5 \left[\frac{\text{m}^3 \cdot \text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} \right]$$

$$w_{t12} = 9,9 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] = 9,9 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

1.8. Die Wärme

1.8. Die Wärme

Die – aufgrund von Temperaturunterschieden – über eine Systemgrenze hinweg tretende Energie nennt man Wärme; Formelzeichen Q , Einheit J (Joule)

Vorzeichenregelung:



Adiabates (wärmedichtes) System

Ein von adiabaten Wänden umgebenes System wird als adiabates System bezeichnet. Es gilt: $Q = 0$.

Wärme ist keine Zustandsgröße

Wärme ist eine Prozessgröße

Die einem System zugeführte Wärme ist positiv; die aus einem System abgeführte Wärme ist negativ.

1.8. Die Wärme

1.8.1. Die spezifischen Wärmekapazitäten

Die Wärme, die zur Erhöhung der Temperatur von 1 kg eines Stoffes um 1 K führt, heißt spezifische Wärmekapazität.

$$c \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \quad \text{bzw.} \quad \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$$

Bei Wärmezufuhr- oder -abfuhr unter konstantem Druck erhält man die isobare spezifische Wärmekapazität:

$$c_p = \text{spez. Wärmekapazität bei konstantem Druck}$$

Bei Wärmezufuhr- oder -abfuhr unter gleichbleibendem Volumen erhält man die isochore spezifische Wärmekapazität:

$$c_v = \text{spez. Wärmekapazität bei konstantem Volumen}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q}{\Delta T} &= m \cdot c & \Rightarrow c &= \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta T} \\ c_p &= \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p; & c_v &= \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_v \end{aligned} \quad (1.15)$$

Generell gilt: $c_p > c_v$

1.8. Die Wärme

1.8.2. Die Wärme aus mikroskopischer Sicht

Temperatur \sim kinetischer Energie der Gasmoleküle



1.9. Aufgaben

1.9. Aufgaben

Aufgabe 1:

Bei einer Ölpumpe zeigt das Manometer einen Überdruck von 10,0 [bar].

- a) Wie hoch ist die Ölsäule h in [mm], die dem Druck entspricht, wenn die Dichte des Öles $0,9 \left[\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \right]$ beträgt?
- b) Wie hoch ist der Absolutdruck am Pumpenausgang in [bar], wenn der barometrische Druck 700 [Torr] beträgt?

Lsg.: a) $p_D = 10 \text{ [bar]} = 10 * 10^5 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

$$\rho_{\text{Öl}} = 0,9 \left[\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \right] = 0,9 * 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$p_D = \rho_{\text{Öl}} * g * h$$

$$h = \frac{p_D}{\rho_{\text{Öl}} \cdot g} = \frac{10 * 10^5}{0,9 * 10^3 * 9,81} \left[\frac{\text{N m}^3 \text{ s}^2}{\text{m}^2 \text{ kg m}} \right] = 113,3 \text{ [m]}$$

b) $p = p_B + p_D$

$$p_B = 700 \text{ [Torr]} = \frac{700}{7,501 * 10^{-3}} = 93\,320,89 \text{ [Pa]} = 0,933 \text{ [bar]}$$

$$p = p_B + p_D = 0,933 + 10 = 10,933 \text{ [bar]}$$

1.9. Aufgaben

Aufgabe 2:

Bei einem Luftdruck von 973 [mbar] nimmt ein Gas bei einer Temperatur von 20 [°C] einen Raum von 3 [m³] ein.

- a) Wie groß ist das Volumen im Normzustand?
b) Wie groß ist die Gasmasse in [g], wenn es sich um Stickstoff handelt?

Lsg.: a) $p_n = 1,013 \text{ [bar]}$

$$T_n = 273,15 \text{ [K]}$$

$$p_1 * V_1 = m * R * T_1$$

$$p_n * V_n = m * R * T_n$$

$$\frac{p_1 * V_1}{p_n * V_n} = \frac{T_1}{T_n}$$

$$V_n = V_1 * \frac{p_1 * T_n}{p_n * T_1} = 3 * \frac{973 * 273,15}{1013 * 293,15} \text{ [m}^3\text{]} = 2,685 \text{ [m}^3\text{]}$$

b) $R_{N_2} = 0,2968 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$ (Tabelle)

$$p_1 * V_1 = m_{N_2} * R_{N_2} * T_1$$

$$m_{N_2} = \frac{p_1 * V_1}{R_{N_2} * T_1} = \frac{0,973 * 10^5 * 3}{296,8 * 293,15} \left[\frac{\text{Nm}^3 \text{ kg K}}{\text{m}^2 \text{ JK}} \right] = 3354,91 \text{ [g]}$$

1.9. Aufgaben

Aufgabe 3:

Bei der Messung eines Luftstroms mit Hilfe einer Messblende wurde bei einem absoluten Druck von 990 [kPa] und einer Temperatur von 120 [°C] ein Volumenstrom von $2400 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$ gemessen.

Ermitteln Sie

- a) den Massenstrom in $\left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right]$ und
- b) den Volumenstrom in $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ bei Normbedingungen.

Lsg.: a) $p_1 * \dot{V} = \dot{m} * R_L * T_1$

$$\dot{m} = \frac{p_1}{R_L * T_1} * \dot{V} = \frac{990 * 10^3}{287,1 * 393,2} * 2400 \left[\frac{\text{N kg K m}^3}{\text{m}^2 \text{ J K h}} \right] = 21047,5 \left[\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right]$$

b) $p_n * \dot{V}_n = \dot{m} * R * T_n$

$$p_1 * \dot{V}_n = \dot{m} * R * T_1$$

$$\frac{p_n * \dot{V}_n}{p_1 * \dot{V}_1} = \frac{T_n}{T_1}$$

$$\dot{V}_n = \frac{T_n * p_1}{T_1 * p_n} * \dot{V}_1 = \frac{273,2 * 990 * 10^3}{393,2 * 1,013 * 10^5} * 2400 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$$

$$\dot{V}_n = 16296,9 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right] = 4,53 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

1.9. Aufgaben

Aufgabe 4:

In einem Seminargruppenraum mit einer Grundfläche von $60 \text{ [m}^2\text{]}$ und $4,5 \text{ [m]}$ Höhe zeigen ein Thermometer $20 \text{ [}^\circ\text{C]}$ und ein Barometer 750 [Torr] an. Durch eine schnelle Änderung der Wetterlage erhöht sich der Luftdruck bei nahezu gleichbleibender Temperatur auf 765 [Torr] . Welche Luftmasse in $[\text{kg}]$ strömt von außen in den Raum ein?

$$\text{Lsg.: (1) } V_1 = 60 * 4,5 \text{ [m}^3\text{]} = 270 \text{ [m}^3\text{]}$$

$$t_1 = 20 \text{ [}^\circ\text{C]} \Rightarrow T_1 = 293,2 \text{ [K]}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = 750 \text{ [Torr]} \\ p_2 = 765 \text{ [Torr]} \end{array} \right\} p_2 - p_1 = 15 \text{ [Torr]} \Rightarrow p_2 - p_1 = 1999,84 \text{ [Pa]}$$

$$(2) \quad m_1 = \frac{p_1 * V_1}{R_L * T_1}$$

$$(3) \quad m_2 = \frac{p_2 * V_1}{R_L * T_1}$$

$$(4) \quad m_2 - m_1 = (p_2 - p_1) * \frac{V_1}{R_L * T_1} = 1999,84 * \frac{270}{287,1 * 293,2} \left[\frac{\text{Nm}^3 \text{ kg K}}{\text{m}^2 \text{ J K}} \right]$$

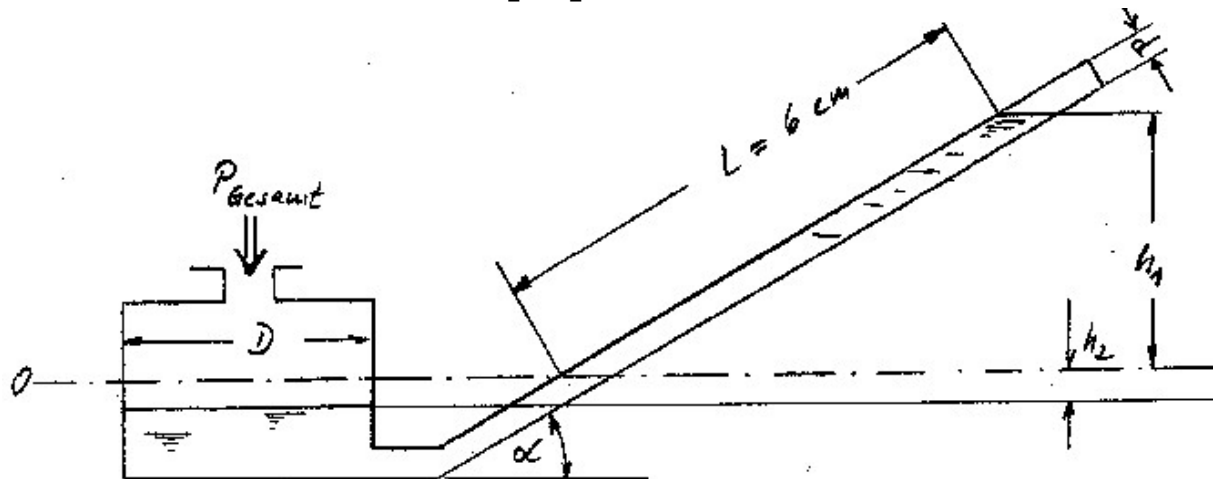
$$m_2 - m_1 = 6,41 \text{ [kg]}$$

1.9. Aufgaben

Aufgabe 5

Der Druck in einem Gasbehälter wird durch ein Schrägröhrmanometer gemäß nachfolgender Skizze gemessen, das gegenüber dem nichtbelasteten Zustand einen Ausschlag von $L = 6 \text{ cm}$ angezeigt. Wie hoch ist der Überdruck im Gasbehälter in [Pa], in [mbar] und in [Mpa]?

$$D = 50 \text{ [mm]}, d = 5 \text{ [mm]}, \alpha = 30 \text{ [°]}, 850 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \text{ (Dichte der Füllflüssigkeit)}$$



Lsg.: (1) $p_{\text{Gesamt}} = p_G = p_b + p_{\bar{u}}$

(2) $p_{\bar{u}} = \rho * g * h$

(3) $h = h_1 + h_2$

(5) $h_1 = L * \sin \alpha$

(4) $p_{\bar{u}} = \rho * g * (h_1 + h_2)$

(6) $\frac{\pi * D^2}{4} * h_2 = \frac{\pi * d^2}{4} * L \rightarrow$ (6a) $h_2 = \frac{d^2}{D^2} * L$

(5), (6) in (3): (3a)

$$h = L * \sin \alpha + \left(\frac{d}{D} \right)^2 * L = L * \left[\sin \alpha + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]$$

$$h = 6 * 10^{-2} \left[0,5 + \left(\frac{5}{50} \right)^2 \right] = 3,06 * 10^{-2} \text{ [m]}$$

(3a) in (2): $p_{\bar{u}} = \rho * g * h = 850 * 9,81 * 3,06 * 10^{-2} \left[\frac{\text{kg m m}}{\text{m}^3 \text{ s}^2} \right]$

$$p_{\bar{u}} = 255 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} \right] = 255 \text{ [Pa]}$$

2.1. Innere Energie

2. Energieerhaltungssatz und Energieinhalt thermodynamischer Systeme

1. Hauptsatz: Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Energie kann nur aus einer Form in eine andere umgewandelt werden.

Bsp.: Wasserwirbelbremse

Wandlung mechanischer Energie in thermische Energie

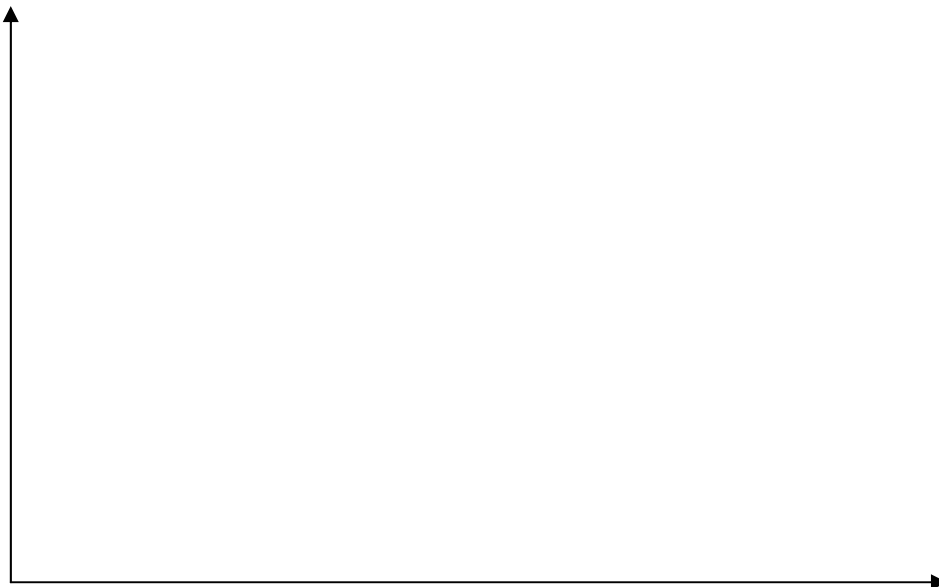
Heizwiderstand

Wandlung elektrischer Energie in thermische Energie

Verbrennungsmotoren

Wandlung chemischer Energie in mechanische Energie

2.1. Innere Energie



Adiabates System: Von außen wird nur Arbeit W zugeführt.

Zustandsänderungen eines adiabaten Systems, die alle von Zustand 1 zu Zustand 2 führen.

$$V_1 = V_2, p_2 > p_1, T_2 > T_1$$

1. Möglichkeit: $1 \rightarrow 3$: Zufuhr von Volumenänderungsarbeit

2.1. Innere Energie

3 → 4: Isochore Zufuhr von Arbeit (Rührwerk: Wellenarbeit ohne Volumenarbeit)

4 → 2: Expansion

2. Möglichkeit: 1 → 2: Isochore Zufuhr von Arbeit

3. Möglichkeit:



Erfahrungssatz:

Für adiabate Systeme ist bei allen Prozessen die Summe der Arbeiten, um von einem Zustand 1 auf einen Zustand 2 zu kommen gleich groß. Bei adiabaten Systemen ist die Arbeit eine Zustandsgröße.

Die in einem thermodynamischen System gespeicherte Energie nennt man die innere Energie U [J].

Die spezifische innere Energie ist durch $u = \frac{U}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$ gegeben.

Die Änderung der inneren Energie U ergibt sich im adiabaten System zu:

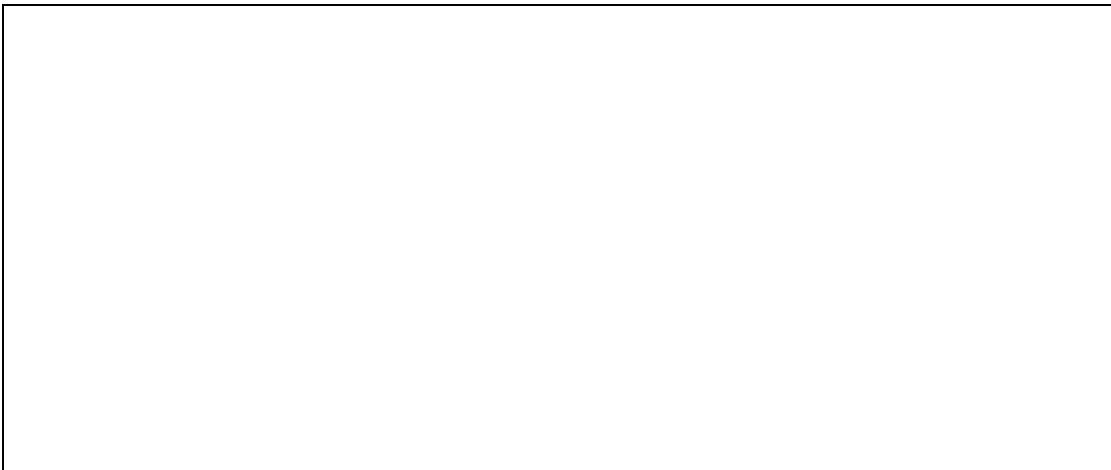
$$U_2 - U_1 = (W_{12})_{\text{adiabat}} \quad (2.1)$$

Die innere Energie U ist eine Zustandsgröße.

2.2. Gleichwertigkeit von Wärme und Arbeit

2.2. Gleichwertigkeit von Wärme und Arbeit

4. Möglichkeit:

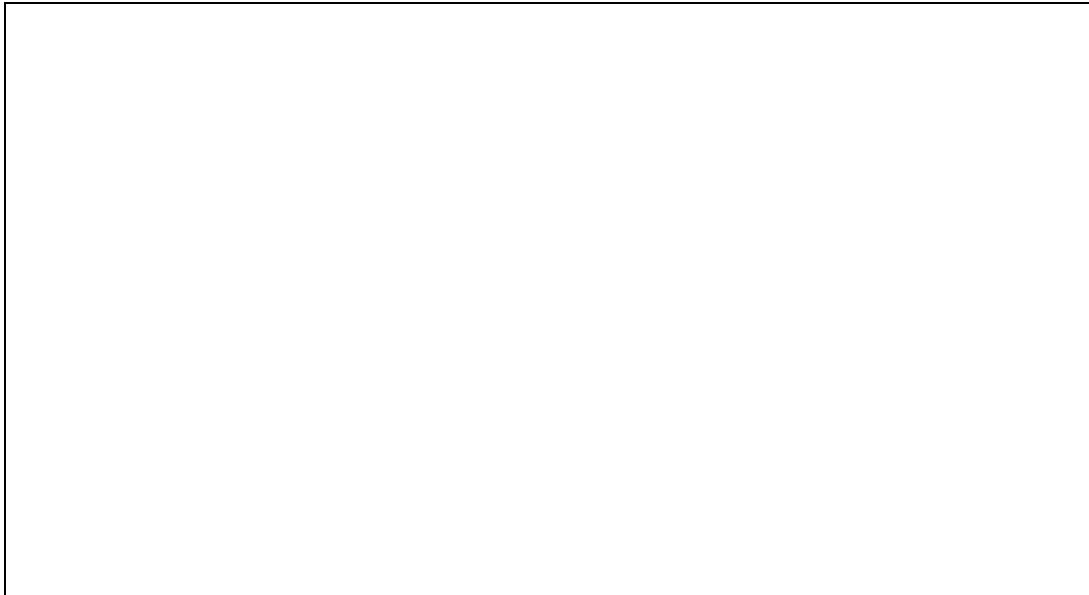


2.2. Gleichwertigkeit von Wärme und Arbeit

Die Änderung der inneren Energie U ist gleich der übertragenen Wärme Q , falls dem System keine Arbeit zugeführt wurde und vom System keine Arbeit verrichtet wurde.

$$U_2 - U_1 = Q_{12} \quad \text{für} \quad W_{12} = 0 \quad (2.2)$$

Wärme und Arbeit können die gleiche Wirkung – einer Temperaturerhöhung – hervorrufen; sie sind darin einander gleichwertig (äquivalent).



Wärme und Arbeit sind gleichwertig:

Wärme kann aus Arbeit erzeugt werden und in Arbeit umgewandelt werden.

2.3. Erster Hauptsatz: Mathematische Form für ruhende geschlossene Systeme (Form I)

2.3. Erster Hauptsatz: Mathematische Form für ruhende geschlossene Systeme (Form I)

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$$

Die innere Energie eines thermodynamischen Systems nimmt gemäß der Zufuhr von Wärme und Arbeit zu.

$$\text{Für } W_{12} = -\int_1^2 p \, dV \text{ gilt:}$$

$$U_2 - U_1 = Q_{12} - \int_1^2 p \, dV \quad \text{oder in spezif. Größen:}$$

$$u_2 - u_1 = q_{12} - \int_1^2 p \, dv$$

Differentielle Form: $dU = dQ + dW$

$$dU = dQ - p \, dV$$

2.4. Die kalorische Zustandsgleichung

2.4. Die kalorische Zustandsgleichung

Form I: (1)
$$U = U(T, V)$$

muss für jeden Stoff experimentell bestimmt werden

(2)
$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

(3) mit 1. HS.
$$dU = dQ + dW \quad \text{folgt}$$

(3) in (2)
$$dQ + dW = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

für isochore Zustandsänderung ($dV = 0$)

gilt für
$$W_{12} = -\int p dV \quad ; \quad W_{12} = 0$$

(4)
$$\frac{dQ}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad | \cdot \frac{1}{m}$$

(5)
$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT} = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V$$

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{\text{bei isochorem Prozess übertragene Wärme}}{\text{entstehende Temperaturdifferenz}}$$

(5)
$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT} = c_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V$$

(6) Allgemein gilt
$$c_V = c_V(T, V) \quad ; \quad dU = m \cdot c_V(T, V) \cdot dT$$

(6a) Für ideale Gase
$$c_V = c_V(T) \quad ; \quad dU = m \cdot c_V(T) \cdot dT$$

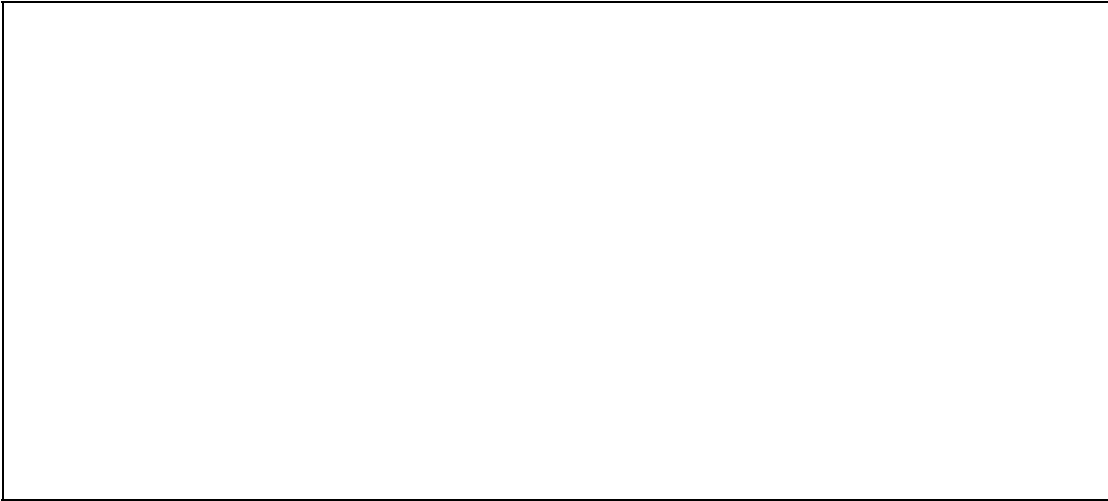
(6b) Für feste und flüssige Körper
$$c_V = c_V(T)$$

(6c) Bei kleinen Temperaturunterschieden
$$c_V = \text{const.}$$

" " "
$$U_2 - U_1 = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1)$$

2.4. Die kalorische Zustandsgleichung

2.4.1. Der Gay-Lussacsche Überstromversuch für ideale Gase



Z1: p_1, T_1, V_1, U_1



Z2: kein Gleichgewichtszustand



Z3: p_2, T_2, V_2, U_2

2.4. Die kalorische Zustandsgleichung

Beobachtungen:

$$p_2 < p_1$$

$$V_2 > V_1$$

$$T_2 = T_1$$

$$W_{13} = 0 \quad Q_{13} = 0$$

1. HS

$$U_3 - U_1 = Q_{13} + W_{13} = 0$$

$$U_1 = U_3$$

$$\rightarrow U(T_1, V_1) = U(T_2, V_2)$$

für ideale Gase

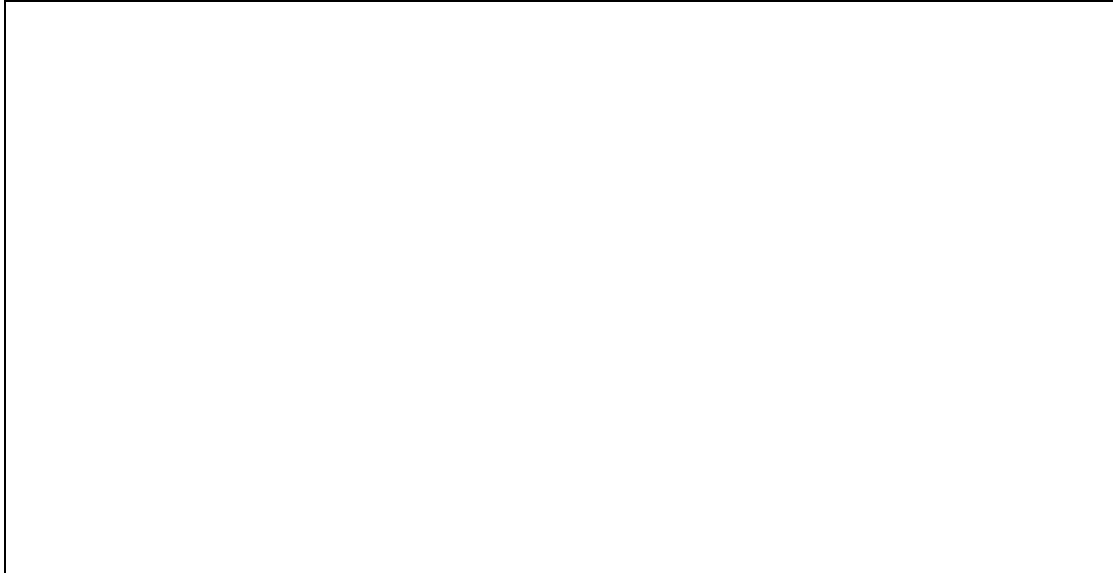
$$U = U(T)$$

2.4. Die kalorische Zustandsgleichung

Übung 1:

geg.: Z1: Sauerstoff $V_1 = 50 \text{ [l]}$, $p_1 = 30 \text{ [bar]}$, $t_1 = 20 \text{ [°C]}$

ges.: m , p_2 , W_{12} , Δu



a) Tab. $R_{O_2} = 259,8 \left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right]$

$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R_{O_2} \cdot T_1} = \frac{30 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{259,8 \cdot 293,15} \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m}^2 \cdot \text{J} \cdot \text{K}} \right] = 1,97 \text{ [kg]}$$

b) $t_2 = 60 \text{ [°C]} \equiv 333,15 \text{ [K]}$

$$p_2 = \frac{m \cdot R_{O_2} \cdot T_2}{V_2} = \frac{1,97 \cdot 259,8 \cdot 333,15}{50 \cdot 10^{-3}} \text{ [bar]} = 34,1 \text{ [bar]}$$

c) $W_{12} = -\int_1^2 p dV = 0$, da $dV = 0$

d) 1.HS $U_2 - U_1 = W_{12} + Q_{12} = Q_{12}$

$$u_2 - u_1 = \frac{Q_{12}}{m} = q_{12}$$

Zä 1 \rightarrow 2 : isochor

$$u_2 - u_1 = q_{12} = c_v \cdot (T_2 - T_1) = 0,658 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right] \cdot 40 \text{ [K]} = 26,32 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

2.4. Die kalorische Zustandsgleichung

Übung 2:

geg.: Z1: Methan, $V_1 = 8 \text{ [m}^3\text{]}$, $V_n = 20 \text{ [m}^3\text{]}$, $T_1 = 285,2 \text{ [K]}$

Z2: $T_2 = 373,2 \text{ [K]}$

ges.: a) p_1 , p_2

b) m

c) Q_{12}

a) (1) $p_1 \cdot V_1 = m \cdot R \cdot T_1$

(2) $p_n \cdot V_n = m \cdot R \cdot T_n$

$$\frac{(1)}{(2)} = (3) \quad \frac{p_1}{p_n} \cdot \frac{V_1}{V_n} = \frac{T_1}{T_n}$$

$$p_1 = \frac{T_1}{T_n} \cdot \frac{V_n}{V_1} \cdot p_n = \frac{285,2}{273,2} \cdot \frac{20}{8} \cdot 1,013 \text{ [bar]} = 2,64 \text{ [bar]}$$

(4) $p_2 \cdot V_2 = m \cdot R \cdot T_2 \quad | V_1 = V_2 = V$

$$\frac{(4)}{(1)} = (5) \quad \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{m \cdot R \cdot T_2}{m \cdot R \cdot T_1}$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot p_1 = \frac{373,2}{285,2} \cdot 2,64 \text{ [bar]} = 3,45 \text{ [bar]}$$

b)
$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R_{\text{Methan}} \cdot T_1} = \frac{2,64 \cdot 10^5 \cdot 8}{518,4 \cdot 285,2} \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m}^2 \cdot \text{J} \cdot \text{K}} \right] = 14,28 \text{ [kg]}$$

c) 1.HS $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} \quad W_{12} = 0, \text{ da } dV = 0$

$$U_2 - U_1 = Q_{12} = m \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) = 14,28 \cdot 1,640 \cdot (373,2 - 285,2) = 2060 \text{ [kJ]}$$

2.5. Die Enthalpie und erster Hauptsatz

2.5. Die Enthalpie und erster Hauptsatz

$$H = U + p \cdot V \text{ [J]}$$
$$h = u + p \cdot v \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

H und h sind Zustandsgrößen

$$H_2 - H_1 = U_2 - U_1 + p_2 V_2 - p_1 V_1 \quad (2.3)$$

1. HS: (1) $H_2 - H_1 = Q_{12} + W_{12} + p_2 V_2 - p_1 V_1$

Annahme: Isobare Prozessführung



$$(2) \quad W_{12} = -\int_1^2 p dV = -p \cdot (V_2 - V_1)$$

$$(3) \quad p_1 = p_2 = p$$

$$(3), (2) \text{ in } (1) \quad H_2 - H_1 = Q_{12} - p \cdot (V_2 - V_1) + p \cdot (V_2 - V_1) = Q_{12}$$

Bei isobarer Prozessführung liefert die Enthalpiedifferenz die übertragene Wärme.

$$H = U + pV$$
$$(5) \quad dH = dU + p dV + V dp$$

andererseits gilt:

2.5. Die Enthalpie und erster Hauptsatz

$$(6) \quad dU = dQ - p dV$$

$$(6) \text{ in } (5) \quad dH = dQ - p dV + p dV + V dp$$

$$(7) \quad dH = dQ + V dp$$

$$(8) \quad dH = dQ + dW_t$$

Erster Hauptsatz Form II: Für offene Systeme

integriert:

$$(9) \quad H_2 - H_1 = Q_{12} + W_{t12}$$

$$(10) \quad h_2 - h_1 = q_{12} + w_{t12}$$

Die Enthalpie eines offenen Systems nimmt gemäß der Zufuhr von Wärme und technischer Arbeit zu.

2.6. Die kalorische Zustandsgleichung (Form II)

2.6. Die kalorische Zustandsgleichung (Form II)

1. HS Form I

$$(7) \quad dH = dQ + V dp$$

andererseits:

$$(11) \quad dH = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT$$

Annahme: isobare Prozessführung

$$(7a) \quad dH = dQ$$

$$(11a) \quad dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT$$

$$(7a) \text{ in } (11a) \quad dQ = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT$$

$$\frac{dQ}{dT} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad | \cdot \frac{1}{m}$$

$$(12) \quad \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT = c_p$$

c_p = spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck

$$(13) \text{ allgemein gilt:} \quad c_p = c_p(T, p); \quad dH = m \cdot c_p(T, p) dT$$

$$(13a) \text{ für ideale Gase:} \quad c_p = c_p(T); \quad dH = m \cdot c_p(T) dT \\ (p \leq 20 \text{ bar})$$

$$(13b) \text{ für feste und flüssige Körper:} \quad c_p = c_p(T)$$

$$\text{für kleine Temperaturintervalle:} \quad c_p = \text{const.}$$

$$(13c) \text{ für kleine Temperaturintervalle:} \quad H_2 - H_1 = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

2.7. Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität

2.7. Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität

$c_p(p = 1 \text{ [bar]}; t = 0 \text{ [}^\circ\text{C]})$	siehe Tab. 1.3
$c_v(p = 1 \text{ [bar]}; t = 0 \text{ [}^\circ\text{C]})$	
$c_p(p = 0 \text{ [bar]}; 0 < t < 3000 \text{ [}^\circ\text{C]})$	siehe Tab.1.9
$c_p(0 \text{ [}^\circ\text{C]} \leq t \leq 1200 \text{ [}^\circ\text{C]})$ für feste Stoffe	siehe Tab.1.5
$c_{p\text{Luft}}(0 \leq p \leq 50 \text{ [bar]}; -50 \text{ [}^\circ\text{C]} \leq t \leq 1000 \text{ [}^\circ\text{C]})$	siehe Tab. 1.2
$c_{p\text{Luft}}(1 \leq p \leq 500 \text{ [bar]}; 0 \text{ [}^\circ\text{C]} \leq t \leq 750 \text{ [}^\circ\text{C]})$	siehe Diagramm 2.2.3

$c_p = c_p(T) =$ wahre spezifische Wärmekapazität



Bei größeren Temperaturdifferenzen wird zur Vereinfachung mit der mittleren spezifischen Wärmekapazität gerechnet.

2.7. Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität

(14) man setzt
$$\int_1^2 c(T) dT = c|_{T_1}^{T_2} \cdot (T_2 - T_1)$$

und definiert:

(14a)
$$c(T_2 - T_1) = \int_1^2 c(T) dT$$

Es folgt:
$$c|_{T_1}^{T_2} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} c(T) dT}{T_2 - T_1}$$

$$c|_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left[\int_{T_0}^{T_2} c(T) dT - \int_{T_0}^{T_1} c(T) dT \right]$$

$$h_2 - h_1 = c_p|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - c_p|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0)$$

$$u_2 - u_1 = c_v|_{T_0}^{T_2} \cdot (T_2 - T_0) - c_v|_{T_0}^{T_1} \cdot (T_1 - T_0)$$

$$h_2 - h_1 = c_p|_{t_0}^{t_2} \cdot (t_2 - t_0) - c_p|_{t_0}^{t_1} \cdot (t_1 - t_0)$$

Gebräuchliche Einheiten und Beziehungen für c_p :

spezif. Wärmekapazität : $c_p \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$

molare Wärmekapazität : $\bar{c}_p \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \right]$

$\frac{\text{Wärmekapazität}}{\text{Normkubikmeter}} \quad C_p \left[\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}} \right]$

2.7. Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität

Beispielaufgabe:

Ein Messingblock von $m = 100$ [kg] soll von einer Temperatur $t_1 = 100$ [°C] auf $t_2 = 500$ [°C] aufgeheizt werden.

Welche Wärmemenge ist dem Messingblock zuzuführen?

geg.: $m = 100$ [kg], $t_1 = 100$ [°C], $t_2 = 500$ [°C]

ges.: Q_{12}

(1) 1. HS: $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$

Fester Stoff: Annahme $V_1 = V_2 \rightarrow$ isochore Zustandsänderung

(1a) 1. HS: $U_2 - U_1 = Q_{12}$, da $dV = 0$

(2) andererseits: $U_2 - U_1 = m \cdot \int_1^2 c_v(T) dT$

(1a) in (2): $Q_{12} = m \cdot \int_1^2 c_v(T) dT$

(3): $Q_{12} = m \cdot [c_v|_{t_0}^{t_2} \cdot (t_2 - t_0) - c_v|_{t_0}^{t_1} \cdot (t_1 - t_0)]$

Tab. 1.5: $c_v|_{t_0}^{t_2} = c_v|_0^{500^\circ\text{C}} = 0,407 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$

$$c_v|_{t_0}^{t_1} = c_v|_0^{100^\circ\text{C}} = 0,370 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

(3): $Q_{12} = 100 [\text{kg}] \cdot \left[0,407 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] \cdot 500 [\text{K}] - 0,370 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] \cdot 100 [\text{K}] \right] = 16,65 [\text{MJ}]$

2.8. Zusammenhang zwischen c_p , c_v und R für ideale Gase

2.8. Zusammenhang zwischen c_p , c_v und R für ideale Gase

$$(1) \quad h = u + pv$$

$$(2) \quad pv = RT$$

$$(3) \quad h = u + RT \rightarrow h = f(T)$$

$$(3a) \quad \frac{dh}{dT} = \frac{du}{dT} + R$$

$$(4) \quad du = c_v(T)dT$$

$$(5) \quad dh = c_p(T)dT$$

$$(4)(5) \text{ in } (3a) \quad c_p = c_v + R \quad (6)$$

$$(6a) \quad c_p - c_v = R$$

$$(7) \quad \text{Def.: } \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \text{Adiabatexponent}$$

$$(6a) \cdot \frac{1}{c_v} : \quad \frac{R}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} - \frac{c_v}{c_v}$$

$$\frac{R}{c_v} = \kappa - 1$$

$$(8) \quad c_v = \frac{R}{\kappa - 1}$$

$$c_p = \kappa \cdot c_v$$

$$(9) \quad c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot R \quad (2.4)$$

2.9. Berechnung der Änderung der Enthalpie und Änderung der inneren Energie

2.9. Berechnung der Änderung der Enthalpie und Änderung der inneren Energie für ideale Gase

Methode	Δh	Δu
1. über mittlere spez. Wärmekap. C_p (Tafel 1.7 und 1.8)	$h_2 - h_1 = c_p _{t_0}^{t_2} \cdot t_2 - c_p _{t_0}^{t_1} \cdot t_1$	$u_2 - u_1 = c_v _{t_0}^{t_2} \cdot t_2 - c_v _{t_0}^{t_1} \cdot t_1$ $u_2 - u_1 = \left(c_p _{t_0}^{t_2} - R \right) \cdot t_2 - \left(c_p _{t_0}^{t_1} - R \right) \cdot t_1$
2. über wahre spez. Wärmekap. (Tafel 1.9) für $\Delta T \leq 300 \text{ K}$	$h_2 - h_1 = c_p(t_m) \cdot (t_2 - t_1)$ mit $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$	$u_2 - u_1 = (c_p(t_m) - R) \cdot (t_2 - t_1)$ mit $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$
3. über Enthalpietafeln (Tafel 1.6; Diagramm 1.21) (Nullpunkt willkürlich)	$h_2 - h_1 = h(t_2) - h(t_1)$ $= h(T_2) - h(T_1)$	$u_2 - u_1 = (h(t_2) - R \cdot T_2) - (h(t_1) - R \cdot T_1)$ $= h_2 - h_1 - R(t_2 - t_1)$

2.9. Berechnung der Änderung der Enthalpie und Änderung der inneren Energie

Bsp.:

Bestimmen Sie die spezifische Enthalpieänderung Δh und die Änderung der inneren Energie Δu für Luft als

ideales Gas bei Temperaturerhöhung von 30 [°C] auf 330 [°C]. $R_{\text{Luft}} = 287,1 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$

- mit der mittleren spezifischen Wärmekapazität
- mit der wahren spezifischen Wärmekapazität
- aus Enthalpietafeln

geg.: $t_1 = 30$ [°C], $t_2 = 330$ [°C], Luft

ges.: $h_2 - h_1$; $u_2 - u_1$

$$\text{a) } h_2 - h_1 = c_p \Big|_{t_0}^{t_2} \cdot (t_2 - t_0) - c_p \Big|_{t_0}^{t_1} \cdot (t_1 - t_0)$$

Tafel 1.7 linear interpoliert:

$$c_p \Big|_{0^\circ\text{C}}^{330^\circ\text{C}} = 1,022 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]; c_p \Big|_{0^\circ\text{C}}^{30^\circ\text{C}} = 1,0052 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$h_2 - h_1 = 1,022 \cdot (330 - 0) \left[\frac{\text{kJ} \cdot \text{K}}{\text{kg K}} \right] - 1,0052 \cdot (30 - 0) \left[\frac{\text{kJ} \cdot \text{K}}{\text{kg K}} \right] = 307,1 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

$$u_2 - u_1 = \left(c_p \Big|_{t_0}^{t_2} - R \right) \cdot t_2 - \left(c_p \Big|_{t_0}^{t_1} - R \right) \cdot t_1$$

$$u_2 - u_1 = (1,022 - 0,2871) \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] \cdot 330 [\text{K}] - (1,0052 - 0,2871) \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] \cdot 30 [\text{K}] = 221,0 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

$$\text{b) } t_m = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{30 + 330}{2} [\text{°C}] = 180 [\text{°C}]$$

$$h_2 - h_1 = c_p(t_m) \cdot (t_2 - t_1)$$

Tafel 1.9 linear interpoliert:

$$c_p(t_m) = 1,0222 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$h_2 - h_1 = 1,0222 \cdot (330 - 30) \left[\frac{\text{kJ} \cdot \text{K}}{\text{kg K}} \right] = 306,7 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

$$u_2 - u_1 = (c_p(t_m) - R) \cdot (t_2 - t_1) = (1,0222 - 0,2871) \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] \cdot 300 [\text{K}] = 220,5 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

$$\text{c) } h_2 - h_1 = h(t_2) - h(t_1)$$

$$\text{Tafel 1. } h(t_2) = 410,5 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]; h(t_1) = 103,2 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

$$h_2 - h_1 = 307,3 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

$$u_2 - u_1 = h(t_2) - h(t_1) - R \cdot (t_2 - t_1) = 307,3 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] - 0,2871 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] \cdot 300 [\text{K}] = 221,1 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

2.10. Adiabate Systeme

2.10. Adiabate Systeme

$$q = 0$$

1. Hauptsatz:

$$q_{12} + w_{12} = u_2 - u_1$$

mit $q_{12} = 0$ (da adiabat)

$$u_2 - u_1 = w_{12}$$

$$c_v \cdot (T_2 - T_1) = -\int_1^2 p \, dv$$

differentielle Form: (1)

$$c_v \, dT = -p \, dv$$

thermische Zustandsgleichung

$$p \cdot v = R \cdot T$$

differenziert

$$p \, dv + v \, dp = R \, dT$$

(2)

$$dT = \frac{p \, dv + v \, dp}{R}$$

(2) in (1)

$$c_v \cdot \frac{p \, dv + v \, dp}{R} = -p \, dv$$
$$c_v \, p \, dv + c_v \, v \, dp = -p \, dv \cdot R$$
$$\text{mit } R = c_p - c_v$$

$$c_v \, p \, dv + c_v \, v \, dp = -c_p \, p \, dv + c_v \, p \, dv$$

$$c_v \, v \, dp = -c_p \, p \, dv$$

$$v \, dp = -\frac{c_p}{c_v} p \, dv = -\kappa p \, dv$$

$$\frac{dp}{p} = -\kappa \frac{dv}{v}$$

$$\int_1^2 \frac{dp}{p} = -\kappa \int_1^2 \frac{dv}{v}$$

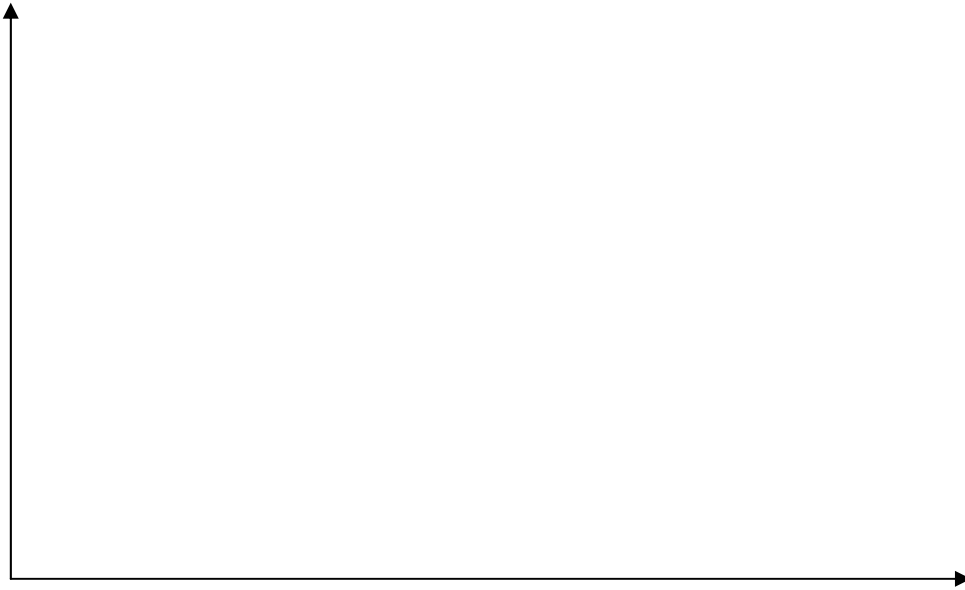
$$\ln \frac{p_2}{p_1} = +\kappa \ln \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^\kappa \quad (2.5)$$

2.10. Adiabate Systeme

Adiabatbeziehung I

$$p_2 \cdot v_2^\kappa = p_1 \cdot v_1^\kappa = p \cdot v^\kappa = \text{const.}$$



$$w_{12} = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1) = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

(1)

$$p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$$

(2)

$$p_2 \cdot v_2 = R \cdot T_2$$

(1)

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} \mapsto \quad (3)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

(2)

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

mit Adiabatbeziehung I:

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^1$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{1}{\kappa}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

(2.6)

2.10. Adiabate Systeme

Adiabatensbeziehung II

$$(4) \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^\kappa$$

Adiabatensbeziehung III

aus I und II:

$$(5) \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$(5a) \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$(5a) = (4) \quad \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^\kappa = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{\kappa-1} \quad (2.7)$$

Fazit

Adiabate Zustandsänderung: v , p und T ändern sich gleichzeitig, aber $dq = 0$

W_{12} für adiabate Systeme:

1. Hauptsatz: $W_{12} = U_2 - U_1$

$$w_{12} = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

$$w_{12} = \frac{1}{\kappa-1} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$w_{12} = \frac{1}{\kappa-1} \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

2.10. Adiabate Systeme

mit Adiabatenbeziehung II:

$$w_{12} = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_1 \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]$$

$$W_{12} = m \cdot w_{12}$$

$$W_{i12} = \kappa \cdot W_{12}$$

Bsp.:

2 [m³] Luft sollen vom Ausgangszustand 1 [bar] und 27 [°C] auf 3 [bar] adiabat komprimiert werden.

geg.: Luft, $\kappa = 1,4$; $R = 287 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$

ges.: Temperatur und spezif. Volumen nach der Verdichtung, Masse und Volumenänderungsarbeit.

$$T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \cdot T_1 = \left(\frac{3}{1} \right)^{1,4} \cdot 300 [\text{K}] = 410,6 [\text{K}] \equiv 137,6 [^{\circ}\text{C}]$$

spezif. Volumen nach Verdichtung:

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad \left| \cdot m \right.$$

$$V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{1,4}} [\text{m}^3] = 0,91 [\text{m}^3]$$

Masse m:

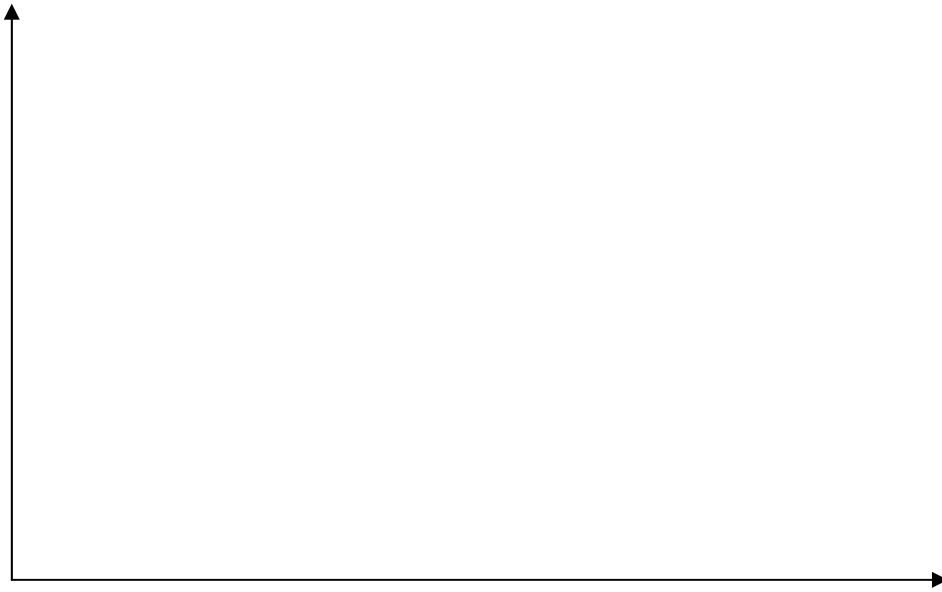
$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 2}{287 \cdot 300} \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m}^2 \cdot \text{Nm} \cdot \text{K}} \right] = 2,3 [\text{kg}]$$

$$v_2 = \frac{V_2}{m} = \frac{0,91}{2,3} = 0,40 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$$

$$W_{12} = m \cdot \frac{1}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = 2,3 \cdot \frac{1}{0,4} \cdot 287 \cdot 300 \left[3^{\frac{0,4}{1,4}} - 1 \right] = 182,6 [\text{kJ}]$$

2.11. Die polytrope Zustandsänderung

2.11. Die polytrope Zustandsänderung



Zä: 1-2i isotherm $p \cdot V^1 = \text{const.}$

Zä: 1-2a adiabat $p \cdot V^\kappa = \text{const.}$

Zä: 1-2p polytrop $p \cdot V^n = \text{const.}$

n = Polytropenexponent

2.11. Die polytrope Zustandsänderung

Ansatz: $p \cdot V^n = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ \ln \frac{T_2}{T_1} &= \frac{n-1}{n} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \\ n \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} &= (n-1) \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \\ n \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} &= n \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} - \ln \frac{p_2}{p_1} \\ n \cdot \left(\ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{p_2}{p_1} \right) &= -\ln \frac{p_2}{p_1} \\ n &= \frac{-\ln \frac{p_2}{p_1}}{\ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{p_2}{p_1}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bsp.:

Luft wird vom Ausgangszustand 1 [bar] und 27 [°C] auf 3 [bar] komprimiert. Dabei wird eine Temperatur von 87 [°C] erreicht.

Wie groß ist der Polytropenexponent n ?

Wird bei der Verdichtung Wärme aufgenommen oder abgegeben?

Lsg.:

$$\begin{aligned} T_1 &= 300 \text{ [K]} \\ T_2 &= 273 + 87 = 360 \text{ [K]} \\ n &= \frac{-\ln 3}{\ln \frac{360}{300} - \ln 3} = 1,2 \end{aligned}$$

Erg.: $1 < n < \kappa = 1,4$ (siehe p, V -Diagramm)

Vergleich mit Endtemperatur bei adiabater Verdichtung

$$\left. \begin{aligned} t_{2\text{adiabat}} &= 137,6 \text{ [°C]} \\ t_{2\text{polytrop}} &= 87 \text{ [°C]} \end{aligned} \right\} \text{ d.h. bei polytroper Verdichtung mit } n < \kappa \text{ wird Wärme an die Umgebung abgegeben}$$

Fazit polytrope Zustandsänderung

Gesetzmäßigkeit: $p \cdot V^n = \text{const.}$

v, p und T ändern sich gleichzeitig und auch $dq \neq 0$

2.11. Die polytrope Zustandsänderung

für:

$1 < n < \kappa$	$p \cdot V^n = \text{const.}$	technische Polytrope
$n = \kappa$	$p \cdot V^\kappa = \text{const.}$	adiabate Zustandsänderung
$n = 1$	$p \cdot V = \text{const.}$	isotherme Zustandsänderung
$n = 0$	$p \cdot V^0 = p \cdot 1 = p = \text{const.}$	isobare Zustandsänderung
$n = \infty$	$p \cdot V^\infty = \text{const.}$	isochore Zustandsänderung

W_{12} für polytrope Zustandsänderung:

1. Hauptsatz: $q_{12} + w_{12} = u_2 - u_1$

in differentieller Form: $dq + dw = du$

Ansatz für polytrope Verdichtung: $dq = c_n dT$

$$dw = -p dv$$

$$du = c_v dT$$

$$(1a) \quad c_n dT - p dv = c_v dT$$

$$(1b) \quad dT(c_n - c_v) = +p dv$$

Thermische Zustandsgleichung: $p \cdot v = R \cdot T$

differenziert: $p dv + v dp = R dT$

$$dT = \frac{p dv + v dp}{R} \quad \text{in (1b)}$$

$$(1c) \quad (p dv + v dp)(c_n - c_v) = p dv \cdot R$$

$$c_n p dv + c_n v dp - c_v p dv - c_v v dp = p dv \cdot R$$

mit $R = c_p - c_v$ ergibt sich :

$$(1d) \quad c_n p dv + c_n v dp - c_v p dv - c_v v dp = c_p p dv - c_v p dv$$

$$p dv (c_n - c_p) = v dp (c_v - c_n)$$

$$v dp = \frac{c_n - c_p}{c_v - c_n} \cdot p dv$$

$$v dp = -\frac{c_p - c_n}{c_v - c_n} \cdot p dv$$

2.11. Die polytrope Zustandsänderung

oder vereinfacht dargestellt:

$$(1e) \quad v dp = -n p dv$$

$$\text{mit:} \quad n = \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n}$$

$$c_p - c_n = n(c_v - c_n) = n c_v - n c_n$$

$$c_p - n c_v = -c_n (n - 1)$$

$$\kappa c_v - n c_v = -c_n (n - 1)$$

$$-c_v (n - \kappa) = -c_n (n - 1)$$

$$c_n = c_v \cdot \frac{n - \kappa}{n - 1}$$

Für $1 < n < \kappa$ (technische Polytrope)
ist die spezifische Wärmekapazität
immer negativ!

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1}$$

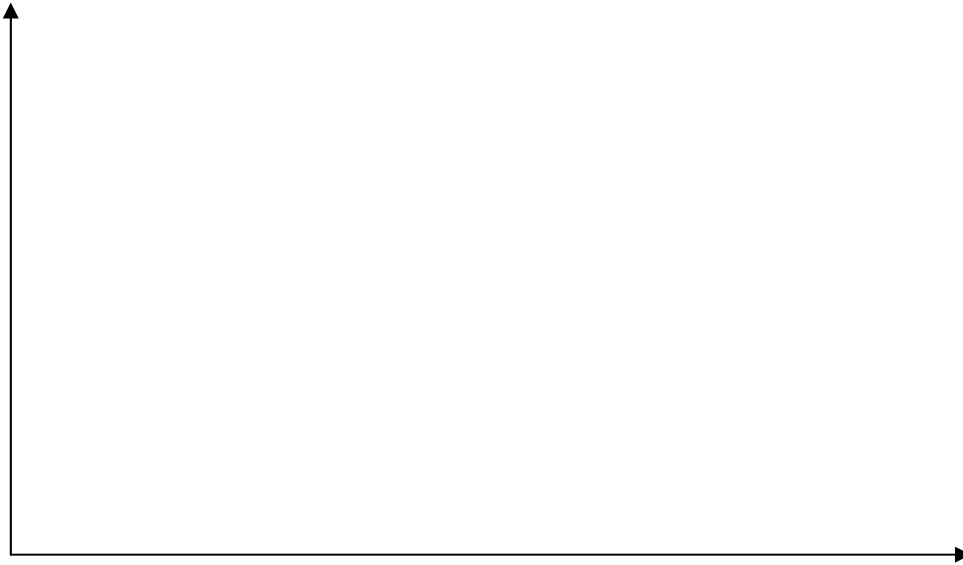
$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1}$$

1. Hauptsatz für polytrope:

$$\begin{aligned} (2) \quad w_{12} &= u_2 - u_1 - q_{12} \\ &= c_v (T_2 - T_1) - c_n (T_2 - T_1) \\ &= c_v (T_2 - T_1) - c_v \cdot \frac{n - \kappa}{n - 1} (T_2 - T_1) \\ &= c_v (T_2 - T_1) \cdot \left(1 - \frac{n - \kappa}{n - 1} \right) \\ &= c_v (T_2 - T_1) \cdot \left(\frac{n - 1 - n + \kappa}{n - 1} \right) \\ &= \frac{\kappa - 1}{n - 1} \cdot c_v (T_2 - T_1) \\ &= \frac{\kappa - 1}{n - 1} \cdot \frac{1}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$(2a) \quad w_{12} = \frac{1}{n - 1} \cdot R \cdot T_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \quad (2.9)$$

2.11. Die polytrope Zustandsänderung



Analog zu den Adiabatenbeziehungen gelten zusammengefasst die folgenden Polytropenbeziehungen:

Polytropenbeziehung I

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^n \quad (2.10)$$

Polytropenbeziehung II

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (2.11)$$

Polytropenbeziehung III

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{n-1} \quad (2.12)$$

Polytropenbeziehung II in (2a):

$$w_{12} = \frac{1}{n-1} \cdot R \cdot T_1 \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \quad (2.13)$$

2.11. Die polytrophe Zustandsänderung

Bsp. 1:

Sauerstoff wird komprimiert. Der Druck steigt auf den dreifachen Anfangswert. Die Temperatur erhöht sich um 50 [K]; $n = 1,15$

ges.: $w_{12}, q_{12}, T_1, \Delta u$

$$\begin{aligned}w_{12} &= \frac{\kappa - 1}{n - 1} \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) \\ &= \frac{\kappa - 1}{n - 1} \cdot \frac{1}{\kappa - 1} \cdot R_{O_2} \cdot (T_2 - T_1) \\ &= \frac{R_{O_2}}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1)\end{aligned}$$

$$R_{O_2} = 0,2598 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$w_{12} = \frac{0,2598}{1,15 - 1} \cdot 50 \left[\frac{\text{kJ K}}{\text{kg K}} \right] = 86,6 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

$$\begin{aligned}q_{12} &= c_n \cdot (T_2 - T_1) \\ &= c_v \cdot \frac{n - \kappa}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \\ &= \frac{1}{\kappa - 1} \cdot R \cdot \frac{n - \kappa}{n - 1} \cdot (T_2 - T_1) \\ &= \frac{1}{1,4 - 1} \cdot 0,2598 \cdot \frac{1,15 - 1,4}{1,15 - 1} \cdot 50 \left[\frac{\text{kJ K}}{\text{kg K}} \right] = -54,7 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]\end{aligned}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$T_2 = T_1 + 50 [\text{K}]$$

$$\frac{T_1 + 50 [\text{K}]}{T_1} = \left(\frac{3p_1}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$1 + \frac{50 [\text{K}]}{T_1} = (3)^{\frac{1,15-1}{1,15}}$$

$$T_1 = \frac{50 [\text{K}]}{(3)^{\frac{1,15-1}{1,15}} - 1} = 324 [\text{K}]$$

$$t_1 = 51 [^{\circ}\text{C}]$$

$$\Delta u = w_{12} + q_{12} = (86,6 - 54,7) \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] = 31,9 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

2.11. Die polytrophe Zustandsänderung

Bsp 2:

5 [kmol] O₂ von 5 [bar] und 100 [°C] expandieren polytrop mit n = 1,1 auf 2 [bar]

ges.: m [kg], V₁ [m³], ρ₁ [kg/m³], v₂ [m³/kg], w₁₂ [kJ/kg], W₁₂ [kJ], T₂ [K], q₁₂ [kJ/kg], ΔU [kJ]

$$m = n \cdot M = 5 \cdot 32 \left[\text{kmol} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right] = 160 \text{ [kg]}$$

$$V_1 = \frac{m \cdot R_{\text{O}_2} \cdot T_1}{p_1} = \frac{160 \cdot 0,2598 \cdot 373}{5 \cdot 10^5} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{Nm} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{kg} \cdot \text{K} \cdot \text{N}} \right] = 0,0310 \cdot 10^3 \text{ [m}^3\text{]} = 31 \text{ [m}^3\text{]}$$

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{160}{31} = 5,16 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

Polytropenbeziehung: $\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}}$

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{V_1}{m} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{31}{160} \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{1,1}} = 0,446 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$$

$$w_{12} = \frac{R \cdot T_1}{n-1} \cdot \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = \frac{0,2598 \cdot 373}{1,1-1} \cdot \left[\left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{1,1-1}{1,1}} - 1 \right] = -77 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

$$W_{12} = m \cdot w_{12} = 160 \cdot (-77) \left[\frac{\text{kJ kg}}{\text{kg}} \right] = -12392 \text{ [kJ]}$$

Polytropenbeziehung: $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1}$

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} = 373 \cdot \left(\frac{31}{0,446} \right)^{1,1-1} \text{ [K]} = 343 \text{ [K]}$$

$$Q_{12} = m \cdot c_n \cdot (T_2 - T_1)$$

$$= m \cdot c_v \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot (T_2 - T_1)$$

$$= m \cdot \frac{1}{\kappa-1} \cdot R \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot (T_2 - T_1)$$

$$= 160 \cdot \frac{1}{1,4-1} \cdot 0,2598 \cdot \frac{1,1-1,4}{1,1-1} \cdot (343 - 373) \left[\frac{\text{kJ kg K}}{\text{kg K}} \right] = 9353 \text{ [kJ]}$$

$$\Delta U = Q_{12} + W_{12} = (9353 - 12392) \text{ [kJ]} = -3039 \text{ [kJ]}$$

2.12. Aufgaben

2.12. Aufgaben

Aufgabe 1:

In einem Verdichter wird Luft auf ein Zehntel ihres Anfangsvolumens komprimiert. Dabei steigt der Druck der Luft von 1,2 [bar] auf 14,5 [bar] an. Die Anfangstemperatur der Luft beträgt 18 [°C].

Gesucht sind

- die Endtemperatur der Luft in [°C],
- die Dichte der Luft nach der Kompression in $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$,
- sowie die Änderung der inneren Energie der Luft in $\left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right]$.

Lsg.: a) $p_1 * V_1 = m * R * T_1$

$$P_2 * V_2 = m * R * T_2$$

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 \frac{V_1}{10}} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{p_2}{10 p_1} * T_1 = \frac{14,5}{12} * 291,15 [\text{K}] = 351,81 [\text{K}]$$

$$t_2 = 78,7 [\text{°C}] \approx 79 [\text{°C}]$$

b) $P_2 * V_2 = m * R * T_2 = \rho_2 * V_2 * R * T_2$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{14,5 * 10^5}{287,1 * 351,81} \left[\frac{\text{N kg K}}{\text{m}^2 \text{ J K}} \right] = 14,36 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

c) $du = c_v(t) dt \Rightarrow \Delta u = c_v(t) (t_2 - t_1)$

2.12. Aufgaben

Aufgabe 2 :

Ein Autoreifen hat ein Fassungsvermögen von $8,2 \text{ [dm}^3\text{]}$, das als unveränderlich angenommen wird. Der Reifen wurde bei $7 \text{ [}^\circ\text{C]}$ und einem Umgebungsdruck von $98,4 \text{ [kPa]}$ auf $0,17 \text{ [MPa]}$ Überdruck gebracht. Durch starke Sonneneinstrahlung und Walkarbeit bei längerer Fahrt stieg die Temperatur im Reifen auf $48 \text{ [}^\circ\text{C]}$.

- Welcher Absolutdruck in [bar] stellt sich nach der Aufwärmung ein?
- Wie groß ist die Masse der eingeschlossenen Luft in [kg]?
- Geben Sie die übertragene Volumenänderungsarbeit an !
- Berechnen Sie die übertragene Wärme in [J] unter der Annahme, dass die Temperaturerhöhung nur durch die Sonneneinstrahlung hervorgerufen wurde!

Lsg.: a) $p_1 = p_u + p_{\bar{u}} = (98,4 * 10^3 + 170 * 10^3) \text{ [Pa]} = 2,684 \text{ [bar]}$

$$\text{Isochore Zustandsänderung : } \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$p_2 = p_1 * \frac{T_2}{T_1} = 2,684 * \frac{321,2}{280,2} \text{ [bar]} = 3,077 \text{ [bar]}$$

b) $p_1 * V = m * R_L * T_1$

$$m = \frac{p_1 * V}{R_L * T_1} = \frac{2,684 * 10^5 * 8,2 * 10^{-3}}{287,1 * 280,2} \left[\frac{\text{N m}^3 \text{ kg K}}{\text{m}^2 \text{ J K}} \right] = 0,0274 \text{ [kg]}$$

c) isochore Zustandsänderung $\rightarrow dV = 0 \rightarrow W_{12} = 0$

d) $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$ mit $W_{12} = 0$

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = m * c_{vL} * (T_2 - T_1)$$

$$Q_{12} = 0,0274 * 0,718 * (321,2 - 280,2) = 806,6 \text{ [J]}$$

2.12. Aufgaben

Aufgabe 3:

In einem Verdichter wird Luft auf ein Zehntel ihres Anfangsvolumens komprimiert. Dabei steigt der Druck der Luft von 1,2 [bar] auf 14,5 [bar] an. Die Anfangstemperatur der Luft beträgt 18 [°C].

Gesucht sind

a) die Endtemperatur der Luft in [°C],

b) die Dichte der Luft nach der Kompression in $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$,

c) sowie die Änderung der inneren Energie der Luft in $\left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}\right]$

Lsg.: a)

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1 &= m \cdot R \cdot T_1 \\ p_2 \cdot V_2 &= m \cdot R \cdot T_2 \\ \frac{p_1 V_1}{p_2 \frac{1}{10} V_1} &= \frac{T_1}{T_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{p_2}{10 p_1} \cdot T_1 = \frac{14,5}{12} \cdot 291,15 [\text{K}] = 351,81 [\text{K}] \\ t_2 &= 78,7 [\text{°C}] \approx 79 [\text{°C}] \end{aligned}$$

b) $P_2 \cdot V_2 = m \cdot R \cdot T_2 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot R \cdot T_2$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{14,5 \cdot 10^5}{287,1 \cdot 351,81} \left[\frac{\text{N kg K}}{\text{m}^2 \text{ J K}} \right] = 14,36 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

c) $du = c_v(t) dt \Rightarrow \Delta u = c_v(t) (t_2 - t_1)$
da $\Delta T \leq 300$ [K] Berechnung über wahre spezifische Wärmekapazität!

$$c_v(t_m) = c_p(t_m) - R, \quad t_m = \frac{t_1 + t_2}{2} = 48,5 [\text{°C}]$$

Interpolation

$$C_p(0[\text{°C}]) = 1,004 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right], \quad C_p(100[\text{°C}]) = 1,008 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$\begin{aligned} c_p(48,5[\text{°C}]) &= c_p(0[\text{°C}]) + \frac{c_p(100[\text{°C}]) - c_p(0[\text{°C}])}{100[\text{°C}] - 0[\text{°C}]} \cdot (48,5 - 0)[\text{°C}] \\ &= 1,00594 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] \end{aligned}$$

$$R = 0,2871 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$\Delta u = (1,00594 - 0,2871) \cdot (351,81 - 291,15) \left[\frac{\text{kJ K}}{\text{kg K}} \right] = 43,602 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$$

2.12. Aufgaben

Aufgabe 4:

In einem Wärmeübertrager werden $500 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$ Abgas - überwiegend bestehend aus Luft - von $400 \text{ [}^\circ\text{C]}$ auf $100 \text{ [}^\circ\text{C]}$ abgekühlt. Der Druck bleibt mit $0,20 \text{ [MPa]}$ konstant. Zu berechnen sind:

- die Volumenströme \dot{V} in $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$ am Eintritt und Austritt,
- die Änderung der spezifischen Enthalpie in $\left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$,
- der übertragene Wärmestrom \dot{Q} in $\left[\frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right]$ und in [kW],
- die Volumenänderungsarbeit pro Zeit \dot{W} in $\left[\frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right]$ und in [kW].

Lsg.: a) $p_n \dot{V}_n = \dot{m} R T_n$
 $p_1 \dot{V}_1 = \dot{m} R T_1$

$$\frac{p_1 \dot{V}_1}{p_n \dot{V}_n} = \frac{T_1}{T_n}$$

$$\dot{V}_1 = \frac{T_1}{T_n} \cdot \frac{p_n}{p_1} \cdot \dot{V}_n = \frac{673,2 \cdot 0,1013}{273,2 \cdot 0,2} \cdot 500 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right] = 624 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$$

$$\dot{V}_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \dot{V}_1 = \frac{373,2}{673,2} \cdot 624 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right] = 346 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$$

b) $h_2 - h_1 \stackrel{\text{Tafel}}{=} 137,7 - 484,7 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] = -311 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]$

c) $\dot{Q} = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) = \rho_n \cdot \dot{V}_n \cdot (h_2 - h_1) = 1,293 \cdot 500 \cdot (-311) \left[\frac{\text{kg m}^3 \text{ kJ}}{\text{m}^3 \text{ h kg}} \right]$
 $= -201061 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{h}} \right]$
 $\dot{Q} = -55,9 \text{ [kW]}$

d) $\dot{W}_{12} = \dot{m} \cdot w_{12} = -\dot{m} \cdot p \cdot (v_2 - v_1) = -p \cdot (\dot{V}_2 - \dot{V}_1)$
 $= -0,2 \cdot 10^6 \cdot (346 - 624) \left[\frac{\text{Nm}^3}{\text{m}^2 \text{ h}} \right] = 55,6 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{J}}{\text{h}} \right]$
 $\dot{W}_{12} = 15,44 \text{ [kW]}$

2.12. Aufgaben

Aufgabe 5:

In einem Zylinder mit gewichtsbelastetem Kolben, dessen Durchmesser 20 [cm] beträgt, expandieren 4 [l] Sauerstoff von 1,03 [bar] und 10 [°C]. Hierbei wird der Kolben um 36 [mm] gehoben.

$$c = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_{O_2}, \quad \kappa = 1,4$$

Zu bestimmen sind:

a) Masse des Sauerstoffs in [g]

b) spezifisches Volumen des Mediums vor der Entspannung, v in $\left[\frac{m^3}{kg} \right]$

c) Volumen des Sauerstoffs nach der Expansion, V in [l]

d) Temperatur des Mediums nach der Entspannung, t in [°C]

e) Dichte des Sauerstoffs nach der Expansion, ρ in $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$

f) Wärme, die dem Medium zugeführt bzw. entzogen wird, Q in [J]

g) Spezifische Volumenänderungsarbeit, die vom Sauerstoff abgegeben bzw. ihm zugeführt wird, w in $\left[\frac{J}{kg} \right]$

h) Änderung der inneren Energie des Mediums, ΔU in [J]

Lsg.: a) $R_{O_2} = 259,8 \left[\frac{J}{kg K} \right]$ (Tabelle)

$$p_1 * V_1 = m * R_{O_2} * T_1$$

$$m = \frac{p_1 * V_1}{R_{O_2} * T_1} = \frac{1,03 * 10^5 * 4 * 10^{-3}}{259,8 * 283,15} \left[\frac{N m^3 kg K}{m^2 JK} \right] = 5,6 [g]$$

b) $v_1 = \frac{V_1}{m} = \frac{4 * 10^{-3}}{0,0056} \left[\frac{m^3}{kg} \right] = 0,714 \left[\frac{m^3}{kg} \right]$

c) $V_2 = V_1 + \Delta V = V_1 + A * h = 4 [l] + 2^2 * \frac{\pi}{4} * 0,36 [l] = 5,13 [l]$

d) isobar: $p_1 = p_2 = p$

$$p * V_1 = m * R * T_1$$

$$p * V_2 = m * R * T_2$$

2.12. Aufgaben

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$T_2 = T_1 * \frac{V_2}{V_1} = 283,15 * \frac{5,13}{4} [\text{K}] = 363,14 [\text{K}]$$

$$t_2 = 90 [^{\circ}\text{C}]$$

e) $p * V_2 = m * R_{O_2} * T_2 = \rho_2 * V_2 * R_{O_2} * T_2$

$$\rho_2 = \frac{p}{R_{O_2} * T_2} = \frac{1,03 * 10^5}{259,8 * 363,14} \left[\frac{\text{N kg K}}{\text{m}^2 \text{ J K}} \right] = 1,1 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

f) isobar

$$Q_{12} = m * q_{12} = m * c_p (T_2 - T_1)$$

$$R_{O_2} = 259,8 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$$

$$c_p = \frac{1,4}{1,4 - 1} 259,8 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right] = 909,3 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$$

$$Q_{12} = 909,3 * (363,14 - 283,15) * 0,0056 \left[\frac{\text{J K kg}}{\text{kg K}} \right] = 407,3 [\text{J}]$$

g) $w_{12} = -p (v_2 - v_1) = -p \left(\frac{5,13 * 10^{-3}}{0,0056} - \frac{4 * 10^{-3}}{0,0056} \right) \left[\frac{\text{N m}^3}{\text{m}^2 \text{ kg}} \right] = -20786 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$

$$\Delta U = Q_{12} + W_{12} = Q_{12} + m * w_{12} = 407,3 - 20786 * 0,0056 = 290,9 [\text{J}]$$

3.1.

Zusammensetzung der Gasgemische

3. Mischungen idealer Gase

:= Ein Gemisch aus idealen Einzelgasen, die miteinander

- im thermischen und mechanischen Gleichgewicht stehen
- nicht chemisch reagieren.

Bsp.:

- Luft (N_2 , O_2 , CO_2)
- Auspuffgase von Verbrennungsmotoren (CO_2 , N_2 , O_2 , H_2O)
- Erdgas (N_2 , CH_4)

3.1. Zusammensetzung der Gasgemische

3.1.1. Massenspezifische Zusammensetzung

Bsp. Gemisch: $m_1 = 3$ [kg] H_2 +
 $m_2 = 1$ [kg] N_2 +
 $m_3 = 4$ [kg] CH_4 +
Gesamtmasse: $m = m_1 + m_2 + m_3$

Gesamtmasse für k Komponenten (1) $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k = \sum_{i=1}^k m_i$

Massenanteil: (2) $\xi_i = \frac{m_i}{m} = \frac{\text{Masse der Komponente } i}{\text{Gesamtmasse der Mischung}}$ (3.1)

Bsp. für drei Komponenten:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m} = \frac{m}{m} = 1$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$

für k Komponenten:

$$\sum_{i=1}^k \xi_i = 1$$

3.1. Zusammensetzung der Gasgemische

3.1.2. Molare Zusammensetzung

Bezugsgröße Molzahl n [mol, kmol]

Gesamtmolzahl für k Komponenten eines Gemisches:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = \frac{m_i}{M_i} = \frac{\text{Masse}}{\text{molare Masse}} \quad (3.2)$$

Molanteil = Molenbruch

$$\psi_i = \frac{n_i}{n} \quad (3.3)$$

Für k Komponenten gilt: (4) $\sum_{i=1}^k \psi_i = 1$

3.1.3. Volumenspezifische Zusammensetzung

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Volumenanteil} \\ \text{Raumanteil} \end{array} \right\} r_i = \frac{V_i}{V} \quad (3.4)$$



Z1: vor dem Mischen

$$p_1 = p_2 = p_3 =$$

$$T_1 = T_2 = T_3 =$$

Z2: nach dem Mischen

$$p$$

$$T$$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^k r_i = 1$$

3.2. Thermische Zustandsgleichung idealer Gasmischungen

3.2. Thermische Zustandsgleichung idealer Gasmischungen



Zustand der Komponente 1 in der Mischung

Thermische Zustandsgleichung Komponente 1 vor dem Mischen:

$$(7) \quad p \cdot V_1 = m_1 \cdot R_1 \cdot T \Rightarrow V_1 = \frac{m_1 \cdot R_1 \cdot T}{p}$$

Thermische Zustandsgleichung Komponente 1 nach dem Mischen:

$$(8) \quad p_1 \cdot V = m_1 \cdot R_1 \cdot T \Rightarrow p_1 = \frac{m_1 \cdot R_1 \cdot T}{V}$$

Partialdruck p_1 = Druck der Komponente 1, der auf die Begrenzungswände wirken würde, falls sie bei vorgegebenem T und V den Raum allein ausfüllen würde.

$$(9) \quad p = p_1 + p_2 + p_3$$

mit k Komponenten

$$(10) \quad p = \sum_{i=1}^k p_i \quad (\text{Daltonsches Gesetz})$$

$$(7) = (8) \quad p \cdot V_1 = p_1 \cdot V \quad \text{oder}$$

$$(11) \quad \frac{V_1}{V} = \frac{p_1}{p}$$

$$(12) \quad r_i = \frac{V_i}{V} = \frac{p_i}{p} \quad \text{verallgemeinert}$$

3.2. Thermische Zustandsgleichung idealer Gasmischungen

$$(13) \quad \boxed{p_i = r_i \cdot p = \psi_i \cdot p} \quad (3.6)$$

Teildruck = Raumanteil * Gesamtdruck

Volumenverhältnis verschiedener Gemischkomponenten:

$$(14) \quad \frac{V_1}{V_2} \stackrel{(12)}{=} \frac{V \cdot r_1}{V \cdot r_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{ebenso}$$

$$(15) \quad \frac{V_1}{V_2} \stackrel{(12)}{=} \frac{\frac{V}{p} \cdot p_1}{\frac{V}{p} \cdot p_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$(14), (15) \rightarrow (16) \quad \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{r_1}{r_2}} \quad (3.7)$$

Die Raumanteile verschiedener Komponenten im Gemisch verhalten sich wie die Teildrücke:

Einheitenbsp.: 15 Vol% CO₂ $\equiv r_{\text{CO}_2} = 0,15$

3.2.1. Die mittlere Dichte ρ_m einer idealen Gasmischung

$$(1) \quad m = m_1 + m_2 + \dots + m_k; \quad \rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$$

$$V \cdot \rho_m = V_1 \cdot \rho_1 + V_2 \cdot \rho_2 + \dots + V_k \cdot \rho_k \quad \left| \cdot \frac{1}{V} \right.$$

$$\rho_m = \frac{V_1}{V} \cdot \rho_1 + \frac{V_2}{V} \cdot \rho_2 + \dots + \frac{V_k}{V} \cdot \rho_k$$

$$\rho_m = r_1 \cdot \rho_1 + r_2 \cdot \rho_2 + \dots + r_k \cdot \rho_k$$

$$(17) \quad \rho_m = \sum_{i=1}^k r_i \cdot \rho_i \quad (3.8)$$

Die Dichte einer idealen Gasmischung ist gleich der Summe der Produkte aus Raumanteil und Dichte der Einzelgase.

Dabei gilt:

$$\rho_i = \frac{p}{R_i \cdot T}$$

Die Dichten der Einzelgase sind auf den Gesamtdruck bezogen.

3.2. Thermische Zustandsgleichung idealer Gasmischungen

3.2.2. Die mittlere Molare Masse M_m

$$(18) \quad \rho = \frac{M}{\bar{v}} = \frac{\text{Molmasse}}{\text{Molvolumen}}$$

$$(19) \quad \frac{M_m}{\bar{v}_m} = \frac{r_1 \cdot M_1}{\bar{v}_1} + \frac{r_2 \cdot M_2}{\bar{v}_2} + \dots + \frac{r_k \cdot M_k}{\bar{v}_k}$$

Nach Avogadro gilt $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = \dots = \bar{v}_k = \bar{v}_m$ für gleichen Druck p und gleiche Temperatur T .

$$(20) \quad M_m = r_1 \cdot M_1 + r_2 \cdot M_2 + \dots + r_k \cdot M_k$$

$$(21) \quad M_m = \sum_{i=1}^k r_i \cdot M_i$$

Die mittlere molare Masse einer idealen Gasmischung ist gleich der Summe der Produkte aus Raumanteil und molarer Masse jedes Einzelgases.

im Normzustand: (22)
$$\rho_{mn} = \frac{M_m}{\bar{v}_n} \quad (3.9)$$

3.2.3. Die Gaskonstante R_m der idealen Gasgleichung

$$R = \frac{\bar{R}}{M} \Rightarrow \bar{R} = R_m \cdot M_m \text{ oder}$$

$$(23) \quad R_m = \frac{\bar{R}}{M_m} \quad (3.10)$$

Bsp. 3 Komponenten

Thermische Zustandsgleichung nach dem Mischen:

$$p_1 \cdot V = m_1 \cdot R_1 \cdot T$$

$$p_2 \cdot V = m_2 \cdot R_2 \cdot T$$

$$p_3 \cdot V = m_3 \cdot R_3 \cdot T$$

$$(24) \quad (p_1 + p_2 + p_3) \cdot V = (m_1 \cdot R_1 + m_2 \cdot R_2 + m_3 \cdot R_3) \cdot T$$

$$p \cdot V = m \cdot \left(\frac{m_1}{m} \cdot R_1 + \frac{m_2}{m} \cdot R_2 + \frac{m_3}{m} \cdot R_3 \right) \cdot T$$

$$(25) \quad p \cdot V = m \cdot \left(\xi_1 \cdot R_1 + \xi_2 \cdot R_2 + \xi_3 \cdot R_3 \right) \cdot T$$

Ebenso gilt für das Gemisch:

$$(26) \quad p \cdot V = m \cdot R_m \cdot T$$

$$(25) = (26): (27) \quad R_m = \xi_1 \cdot R_1 + \xi_2 \cdot R_2 + \xi_3 \cdot R_3$$

allgemein:
$$R_m = \sum_{i=1}^k \xi_i \cdot R_i \quad (3.11)$$

Die mittlere Gaskonstante einer idealen Gasmischung ist gleich der Summe der Produkte aus Massenanteil und Gaskonstante jedes Einzelgases.

3.2. Thermische Zustandsgleichung idealer Gasmischungen

3.2.4. Zusammenhang zwischen Massen- und Raumanteilen

$$(1) \quad m_1 = \rho_1 \cdot V_1 \qquad (2) \quad m = \rho_m \cdot V$$

$$(1)/(2) \quad \frac{m_1}{m} = \frac{\rho_1}{\rho_m} \cdot \frac{V_1}{V}$$

$$\frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho_m} \cdot \frac{V_i}{V}$$

verallgemeinert: (3) $\boxed{\xi_i = r_i \cdot \frac{\rho_i}{\rho_m}}$ (3.12)

andererseits:

$$(4) \quad \rho_m = \frac{M_m}{\bar{V}} \qquad (5) \quad \rho_i = \frac{M_i}{\bar{V}}$$

$$(5)/(4): (6) \quad \frac{\rho_i}{\rho_m} = \frac{M_i}{M_m}$$

$$(6) \text{ in } (3): (7) \quad \xi_i = r_i \cdot \frac{M_i}{M_m}$$

$$(8) \quad p_1 \cdot V = m_1 \cdot R_1 \cdot T \qquad (9) \quad p \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

$$(8)/(9) \quad \frac{p_1}{p} = \frac{m_1}{m} \cdot \frac{R_1}{R_m}$$

$$(10) \quad r_1 = \xi_1 \cdot \frac{R_1}{R_m} \quad \text{oder verallgemeinert}$$

$$(10a) \quad r_i = \xi_i \cdot \frac{R_i}{R_m} \qquad (3.13)$$

3.3. Kalorische Zustandsgrößen der idealen Gasmischung

3.3. Kalorische Zustandsgrößen der idealen Gasmischung

mittlere spezifische Wärmekapazität der Gasmischung:

massenspezifisch:

$$(1) \quad c_{pm} = \sum_{i=1}^k \xi_i \cdot c_{pi} \quad (3.14)$$

$$(2) \quad c_{vm} = \sum_{i=1}^k \xi_i \cdot c_{vi} \quad (3.15)$$

volumenspezifisch:

$$(3) \quad C_{pm} = \sum_{i=1}^k r_i \cdot C_{pi} \quad (3.16)$$

$$(4) \quad C_{vm} = \sum_{i=1}^k r_i \cdot C_{vi} \quad (3.17)$$

Enthalpieänderung idealer Gasmischungen:

$$(5) \quad h_2 - h_1 = c_{pm} \Big|_{t_0}^{t_2} \cdot (t_2 - t_0) - c_{pm} \Big|_{t_0}^{t_1} \cdot (t_1 - t_0) \quad (3.18)$$

Änderung der inneren Energie:

$$(6) \quad u_2 - u_1 = c_{vm} \Big|_{t_0}^{t_2} \cdot (t_2 - t_0) - c_{vm} \Big|_{t_0}^{t_1} \cdot (t_1 - t_0) \quad (3.19)$$

bei Basis Normkubikmeter:

$$(7) \quad h_{2n} - h_{1n} = C_{pm} \Big|_{t_0}^{t_2} \cdot (t_2 - t_0) - C_{pm} \Big|_{t_0}^{t_1} \cdot (t_1 - t_0) \quad (3.20)$$

3.3. Kalorische Zustandsgrößen der idealen Gasmischung

Beispielaufgabe 1:

5,0 kg Methan mit $t = 0$ [°C]; $p = 1,013$ [bar] werden mit $V_n = 3$ [m³] Luft gemischt
Annahme für Luft: $r_{O_2} = 21$ [Vol %], $r_{N_2} = 79$ [Vol %]

ges.: a) ξ_{CH_4} , ξ_{O_2} , ξ_{N_2}

b) R_m

c) r_{CH_4} , r_{O_2} , r_{N_2}

$$\text{Lsg.: (1) } r_{O_2} = \frac{V_{O_2}}{V_{nLuft}} = 0,21 \quad (2) \quad r_{N_2} = \frac{V_{N_2}}{V_{nLuft}} = 0,79$$

$$(1a) \quad V_{O_2} = r_{O_2} \cdot V_{nLuft} \quad (2a) \quad V_{N_2} = r_{N_2} \cdot V_{nLuft}$$

$$(3) \quad m = m_{CH_4} + m_{O_2} + m_{N_2}$$

$$(4) \quad m_{CH_4} = 5,0 [\text{kg}] \quad (5) \quad V_{nLuft} = 3 [\text{m}^3]$$

$$(6) \quad p_n \cdot V_{O_2} = m_{O_2} \cdot R_{O_2} \cdot T \Rightarrow m_{O_2} = \frac{p_n \cdot V_{O_2}}{R_{O_2} \cdot T}$$

$$(7) \quad p_n \cdot V_{N_2} = m_{N_2} \cdot R_{N_2} \cdot T \Rightarrow m_{N_2} = \frac{p_n \cdot V_{N_2}}{R_{N_2} \cdot T}$$

$$(1a) \text{ in } (6): (8) \quad m_{O_2} = p_n \cdot \frac{r_{O_2} \cdot V_{nLuft}}{R_{O_2} \cdot T} = 1,013 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,21 \cdot 3}{259,8 \cdot 273,15} [\text{kg}] = 0,899 [\text{kg}]$$

$$(2a) \text{ in } (7): (9) \quad m_{N_2} = p_n \cdot \frac{r_{N_2} \cdot V_{nLuft}}{R_{N_2} \cdot T} = 1,013 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,79 \cdot 3}{296,8 \cdot 273,15} [\text{kg}] = 2,961 [\text{kg}]$$

$$(8), (9) \text{ in } (3) \quad m = (5 + 0,899 + 2,961) [\text{kg}] = 8,860 [\text{kg}]$$

$$\xi_{CH_4} = \frac{m_{CH_4}}{m} = 0,564$$

$$\xi_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{m} = 0,102$$

$$\xi_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{m} = 0,334$$

$$\text{b) } R_m = \xi_{CH_4} \cdot R_{CH_4} + \xi_{O_2} \cdot R_{O_2} + \xi_{N_2} \cdot R_{N_2} \\ = 0,564 \cdot 0,5184 + 0,102 \cdot 0,2598 + 0,334 \cdot 0,2968$$

$$= 0,418 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$\text{c) } \xi_i = r_i \cdot \frac{R_m}{R_i} \Rightarrow r_i = \frac{R_i}{R_m} \cdot \xi_i$$

$$r_{CH_4} = \xi_{CH_4} \frac{R_{CH_4}}{R_m} = 0,700$$

$$r_{O_2} = \xi_{O_2} \frac{R_{O_2}}{R_m} = 0,063$$

$$r_{N_2} = \xi_{N_2} \frac{R_{N_2}}{R_m} = 0,237$$

$$\text{Probe: } \sum_{i=1}^3 r_i = 1$$

3.3. Kalorische Zustandsgrößen der idealen Gasmischung

Beispielaufgabe 2:

Rauchgas mit folgenden Raumanteilen in Vol %:

CO ₂	8 %
H ₂ O _D	17,9 %
N ₂	70,9 %
O ₂	3,2 %

Eintrittstemperatur: $t_1 = 1000^\circ\text{C}$

Austrittstemperatur: $t_2 = 500^\circ\text{C}$

Normvolumenstrom: $\dot{V}_n = 10^3 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$

ges.: \dot{Q}_{12} (Welchen Wärmestrom \dot{Q} kann ein Rauchgas abgeben, wenn es sich isobar von t_1 auf t_2 abkühlt?)

Lsg.:

1. Hauptsatz offene Systeme

$$dH = dW_t + dq = \underbrace{\int_1^2 v dp}_{0, \text{ da } dp=0} + dQ$$

$\dot{m}(h_2 - h_1) = \dot{Q}_{12}$ bzw. bezogen auf den Durchsatz in Normkubikmeter

$$(1) \quad \dot{Q}_{12} = \dot{V}_n (h_{2n} - h_{1n})$$

$$(2) \quad \dot{Q}_{12} = \dot{V}_n [h_{2n} - h_{1n}] = \dot{V}_n \left[C_{pn}|_{t_0}^{t_2} \cdot (t_2 - t_0) - C_{pn}|_{t_0}^{t_1} \cdot (t_1 - t_0) \right]$$

$$(3) \quad C_{pn}|_{t_0}^{t_2} = \sum_{i=1}^4 r_i \cdot C_{pi}|_{t_0}^{t_2}$$

$$(4) \quad C_{pn}|_{t_0}^{t_1} = \sum_{i=1}^4 r_i \cdot C_{pi}|_{t_0}^{t_1}$$

Stoff	Raumanteil r_i	$C_{pi} _0^{500^\circ\text{C}}$	$r_i \cdot C_{pi} _0^{500^\circ\text{C}}$	$C_{pi} _0^{1000^\circ\text{C}}$	$r_i \cdot C_{pi} _0^{1000^\circ\text{C}}$
CO ₂	0,080	2,011	0,161	2,228	0,178
H ₂ O	0,179	1,590	0,285	1,722	0,308
N ₂	0,709	1,334	0,946	1,399	0,992
O ₂	0,032	1,400	0,045	1,480	0,047
	%	$\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \text{K}} \right)$	$\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \text{K}} \right)$	$\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \text{K}} \right)$	$\left(\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \text{K}} \right)$

3.3. Kalorische Zustandsgrößen der idealen Gasmischung

$$\Rightarrow C_{p,n} \Big|_0^{500^\circ\text{C}} = 0,161 + 0,285 + 0,946 + 0,045 = 1,437 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \text{K}} \right]$$

$$\Rightarrow C_{p,n} \Big|_0^{1000^\circ\text{C}} = 0,178 + 0,308 + 0,992 + 0,047 = 1,525 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \text{K}} \right]$$

$$\dot{Q}_{12} = 10^3 \cdot (1,437 \cdot 500 - 1,525 \cdot 1000) \left[\frac{\text{m}^3 \cdot \text{kJ} \cdot \text{K}}{\text{h} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{K}} \right] = -807 \left[\frac{\text{MJ}}{\text{h}} \right] = -807 \cdot \frac{10^3}{3600} [\text{kW}] = -224 [\text{kW}]$$

3.4. Aufgaben

3.4. Aufgaben

Aufgabe:

Die Abgasanalyse einer Feuerung lieferte die folgende volumenspezifische Abgaszusammensetzung:
12 [%] CO₂; 5 [%] O₂; 1 [%] CO; 82 [%] N₂.

Wie groß sind :

- die molare Masse
- die Dichte im Normzustand
- das spezifische Volumen im Normzustand
- die Gaskonstante des Abgases, sowie
- die massenspezifische Zusammensetzung des Abgases?

Lsg.: a) $M_m = r_{\text{CO}_2} M_{\text{CO}_2} + r_{\text{O}_2} M_{\text{O}_2} + r_{\text{CO}} M_{\text{CO}} + r_{\text{N}_2} M_{\text{N}_2}$

$$M_m = 0,12 * 44,01 + 0,05 * 32,0 + 0,01 * 28,01 + 0,82 * 28,01$$

$$= 30,1295 \left[\frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \right]$$

b) $\bar{v}_n = 22,4 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \right]$

$$\rho_{m_n} = \frac{M_m}{\bar{v}_n} = \frac{30,1295 \left[\frac{\text{kg kmol}}{\text{m}^3 \text{ kmol}} \right]}{22,4} = 1,345 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

c) $v_{m_n} = \frac{1}{\rho_{m_n}} = \frac{1}{1,345} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] = 0,743 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$

d) / e) $R_m = \sum_{i=1}^4 \xi_i * R_i$

$$\xi_1 = r_{\text{CO}_2} * \frac{M_{\text{CO}_2}}{M_m} = 0,12 * \frac{44,01}{30,1295} = 0,1753$$

$$\xi_2 = r_{\text{O}_2} * \frac{M_{\text{O}_2}}{M_m} = 0,05 * \frac{32,0}{30,1295} = 0,0531$$

$$\xi_3 = r_{\text{CO}} * \frac{M_{\text{CO}}}{M_m} = 0,01 * \frac{28,01}{30,1295} = 0,0093$$

$$\xi_4 = r_{\text{N}_2} * \frac{M_{\text{N}_2}}{M_m} = 0,82 * \frac{28,01}{30,1295} = 0,7623$$

3.4. Aufgaben

$$R_1 = 0,1889 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$R_2 = 0,2598 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$R_3 = 0,2968 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$R_4 = 0,2968 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$

$$R_m = \xi_1 * R_1 + \xi_2 * R_2 + \xi_3 * R_3 + \xi_4 * R_4$$

$$R_m = 0,1753 * 0,1889 + 0,0531 * 0,2598 + 0,0093 * 0,2968 + 0,7623 * 0,2968$$

$$R_m = 0,2759 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right]$$